برازش توابع انتقالی خاک با استفاده از رگرسیون فازی

جهانگرد محمدی[۱] و سید محمود طاهری[۲]

چکیده

توابع انتقالی خاک عبارت‌اند از مدل‌های تخمین یک خصوصیت مشخص خاک با استفاده از ویژگی‌هایی که اندازه‌گیری آنها آسان، سریع و یا ارزان می‌باشد. روش معمول در برازش توابع انتقالی خاک استفاده از رگرسیون آماری است. این روش بر پایه فرض دقیق بودن متغیرهای مورد مطالعه و مشاهدات مربوط به آنها استوار بوده و در نهایت روابط بین متغیرها نیز به طور دقیق مشخص می‌شود. در مدل سازی سیستم‌های طبیعی مانند خاک، عموماً با مشاهدات نادقیق و یا روابط مبهم رو به رو هستیم، بنابراین استفاده از روش‌های برازش توابع که قادر به تبیین ساختار مبهم سیستم و در اختیار نهادن الگوهای منبطق با واقعیت هستند، ضروری است. در بررسی حاضر از روش رگرسیون مبتنی بر نظریه مجموعه‌های فازی به منظور برازش توابع انتقالی شیمیایی و فیزیکی خاک استفاده شد. مدل‌های بهینه رگرسیون خطی با ضرایب فازی برای توابع فوق به دست آمد. تجزیه و تحلیل حساسیت بر پایه سطح اعتبار و با توجه به مقدار ابهام مدل‌ها و مقدار شاخص اطمینان مدل‌ها انجام شد.

نتایج نشان داد که روش رگرسیون فازی در شرایط روابط ابهامی بین متغیرها و به طور کلی در مواردی که با خطاهای ناشی از ابهام در ساختار معادلات رگرسیونی رو به رو هستیم، می‌تواند مکمل و یا جایگزین مناسبی برای روش رگرسیون آماری تلقی شود.

واژه‌های کلیدی: *اعداد فازی، برنامه ریزی خطی، توابع انتقالی خاک، رگرسیون فازی*

مقدمه

یکی از جنبه‌های مهم بررسی خاک، دانستن روابط و هم‌بستگی بین خصوصیات مختلف خاک و بیان کمّی آنها در قالب مدل‌های آماری است. این مدل‌ها که اصطلاحاً توابع انتقالی خاک (Pedo Ttransfer Functions)(PTFs) نامیده می‌شوند، عمدتاً شامل مدل‌های رگرسیون آماری هستند. توسط این مدل‌ها خصوصیات مهم خاک که اندازه‌گیری آنها پر هزینه و وقت‌گیر است، به صورت تابعی از ویژگی‌های خاک که به

۱. دانشیار خاک‌شناسی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد

۲. استادیار آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

[DOR: 20.1001.1.24763594.1384.9.2.5.5]

سادگی و با هزینه کمتری قابل اندازه‌گیری هستند، بیان می‌گردد (۵). اخیراً تلاش‌هایی به منظور به کارگیری روش‌ها و فنون جدید در مدل سازی چنین توابعی صورت گرفته است که می‌توان برای نمونه به استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی (Artificial neural networks) اشاره کرد (۱۳، ۱۴ و۱۸). تمامی این روش‌ها بر پایه فرض دقیق بودن متغیرهای مورد مطالعه و مشاهدات مربوط به آنها استوار است و روابط بین متغیرها نیز دقیق فرض می‌گردد. حال آن که در سیستم‌های طبیعی مانند خاک، عموماً با مشاهدات یا روابط نادقیق بین متغیرها رو به رو هستیم. در چنین شرایطی، از مدل‌هایی باید بهره گرفت که قادر به ارائه الگوهای مناسب‌تر باشند، به گونه‌ای که این مدل‌ها بتوانند انطباق بیشتری با دنیای واقعی داشته باشند. بدین ترتیب، با توجه به ماهیت ابهامی پدیده‌های مرتبط با خاک یا تقریبی بودن مقادیر اندازه‌گیری شده خصوصیات مختلف خاک، به نظر می‌رسد لزوم بهره‌گیری از روش‌های مبتنی بر نظریه مجموعه‌های فازی در پردازش توابع پدوترانسفر بیش از پیش ضروری باشد. هم اکنون کاربرد نظریه مجموعه‌های فازی در علوم خاک رو به گسترش است. از جمله می‌توان به کاربرد این نظریه در طبقه بندی و پهنه بندی خاک‌ها و ارزیابی اراضی اشاره کرد (۴، ۶، ۱۲ و ۱۶).

نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ عرضه شد (۲۵). این نظریه یک قالب جدید ریاضی به منظور تجزیه و تحلیل مفاهیم و متغیرهای مبهم و سیستم‌های مبتنی بر روابط تقریبی ارائه می‌کند. خاطر نشان می‌شود که نظریه آمار کلاسیک برای بررسی الگوها و سیستم‌های شامل عدم قطعیت آماری (منسوب به پیشامدهای تصادفی) ارائه گردیده است. در شرایطی که احساس می‌شود عدم اطمینان حاکم بر سیستم و الگوی مورد نظر از نوع امکانی و نه از نوع احتمالی است، باید از نظریه مجموعه‌های فازی بهره گرفت. در ادامه، این نکته درمورد مدل‌های رگرسیونی، که پژوهش حاضر مبتنی برآنهاست، بیشتر توضیح داده شده است.

در یک مدل رگرسیونی ممکن است خطای مدل ناشی از مبهم بودن و یا تقریبی بودن روابط بین متغیرهای مورد مطالعه باشد و ارتباطی به عدم اطمینان منسوب به خطای تصادفی نداشته باشد. هم‌چنین ممکن است در یک مدل رگرسیونی با مشاهدات مبهم روبه رو باشیم. در این موارد می‌توان از مدل‌های رگرسیون فازی(Fuzzy regression) به جای مدل‌های رگرسیون آماری استفاده کرد (۱، ۳، ۱۵، ۲۱، ۲۲ و ۲۴).

رگرسیون فازی نخستین بار توسط تاناکا و همکاران (۲۲) معرفی شد. آنها مدل رگرسیون خطی با ضرایب فازی را مورد توجه قرار دادند. پس از آن محققان بسیاری اقدام به مطالعه و بررسی جنبه‌های مختلف آن نمودند. در این رهیافت، مسأله برازش مدل رگرسیون فازی عموماً معادل با یک مسأله برنامه‌ریزی خطی(و در بعضی حالت‌ها، برنامه‌ریزی غیر خطی) می‌شود. رهیافت دیگر، استفاده از روش کمترین مربعات برای بررسی و برازش مدل‌های رگرسیون فازی است که نخستین بار توسط کلمینس (۷) و دایاموند (۸) مورد توجه قرار گرفت. کیم و همکاران (۱۰) رگرسیون آماری (معمولی) را با رگرسیون فازی از جهات مختلف مانند فرض‌های اولیه، چگونگی برآورد پارامترها و زمینه‌های کاربردی مورد مقایسه قرار دادند. برای مرور و بررسی مطالعات انجام شده درباره رگرسیون فازی می‌توان به طاهری (۲۰) مراجعه نمود. هدف از مقاله حاضر معرفی رگرسیون فازی و نشان دادن قابلیت‌های کاربردی آن در بسط و توسعه مدل‌های خطی (رگرسیون) به منظور برآورد توابع انتقالی خاک است.

مجموعه‌های فازی و اعداد فازی

فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. هر زیر مجموعه معمولی A از X، توسط یک تابع از X به مجموعه {۱و۰}، به نام تابع نشانگر، تعریف می شود که عبارت است از:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases} \qquad [1]$$

حال اگر برد تابع نشانگر از مجموعه دو عضوی {۱و۰} به بازه [۱و۰] توسعه داده شود، یک تابع وجود خواهد داشت که به هر عضو از X، عددی را از بازه [۱و۰] نسبت می‌دهد و تابع

[DOR: 20.1001.1.24763594.1384.9.2.5.5]

عضویت $\tilde{A}$، $\mu_{\tilde{A}(x)}$، نامیده می‌شود. در این حالت $\tilde{A}$ تعمیمی از مفهوم مجموعه معمولی است و یک مجموعه فازی از X نامیده می‌شود.

بدین ترتیب، یک مجموعه فازی، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن به طور خلاصه پیوسته از بازه [۱و۰] اختیار می‌شود. تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}(x)}$ (یا به طور خلاصه $\tilde{A}(x)$)، به هر عنصر از X، یک عدد را از بازه [۱و۰] به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\tilde{A}(x)$ به عدد یک نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است و بالعکس نزدیکی آن به صفر نشان دهنده تعلق کمتر x به $\tilde{A}$ است. هم‌چنین، مجموعه معمولی نقاطی از X که درجه عضویت آنها در $\tilde{A}$ دست کم برابر α باشد، α- برش $\tilde{A}$ نامیده شده و با $\tilde{A}_\alpha$ (یا برش $\tilde{A}$ در سطح α) نشان داده می‌شود. به بیان دیگر: $\tilde{A}_\alpha=\{x\in X;\ \tilde{A}(x)\ge\alpha\}$.

مجموعه‌های فازی خاصی که در مسایل کاربردی بسیار متداول هستند، و به علاوه محاسبات ریاضی با آنها از الگوهای خاصی پیروی می‌کند (۲)، اعداد فازی مثلثی نام دارند. تابع عضویت یک عدد فازی مثلثی به صورت زیر است:

$$\tilde{N}(x)=\begin{cases}0 & x\le S^L\\ \dfrac{x-S^L}{C-S^L} & S^L\le x\le C\\ \dfrac{S^R-x}{S^R-C} & C\le x\le S^R\\ 0 & S^R\le x\end{cases} \qquad [۲]$$

عدد فازی مثلثی $\tilde{N}$ با نماد $\tilde{N}=(C,S^L,S^R)_T$ نشان داده می‌شود. عدد C مقدار میانی، و اعداد S^L و S^R به ترتیب، پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{N}$ نامیده می‌شوند. در حالتی که $S^L=S^R$ ، عدد فازی مثلثی $\tilde{N}$ متقارن گفته می‌شود. می‌توان یک عدد فازی مثلثی را برحسب ضریب کشیدگی k (نسبت پهنای راست به پهنای چپ) نیز بیان کرد. در این حالت $\tilde{N}$ به صورت $(C,S^L,kS^L)_T$ نشان داده می‌شود.

مواد و روش‌ها

مجموعه داده‌ها و برازش توابع انتقالی توسط رگرسیون معمولی

داده‌های مورد استفاده در پژوهش حاضر، بخشی از مجموعه اطلاعات حاصل از بررسی خاک‌های منطقه دشت سیلاخور در استان لرستان است. نمونه برداری در محدوده ۱۰۰ هکتاری و به صورت شبکه‌های منظم با ابعاد ۲۰۰ متر در ۲۰۰ متر و از لایه سطحی ۳۰-۰ سانتی‌متری واقع در مرکز هر شبکه انجام شد. خصوصیات خاک شامل درصد رس، سیلت و شن، اندازه‌گیری به روش پیپت (۱۱)، درصد رطوبت اشباع (SP)، درصد کربن آلی (OC) اندازه‌گیری به روش والکی- بلاک (۱۹)، درصد آهک (روش تیتراسیون برگشتی) و ظرفیت تبادل کاتیونی (CEC) اندازه‌گیری به روش استات سدیم در پ هاش ۸/۲ مورد بررسی و اندازه گیری قرار گرفت(۱۹). دو تابع انتقالی شیمیایی و فیزیکی خاک، با استفاده از روش رگرسیون معمولی (روش حداقل مربعات) و به شیوه رگرسیون گام به گام (Stepwise regression) برای تخمین ظرفیت تبادل کاتیونی (CEC) و درصد رطوبت اشباع (SP)، برازش داده شد.

رگرسیون فازی

با توجه به نتایج به دست آمده از رگرسیون آماری، رابطه خطی بین متغیرهای مورد مطالعه تأیید و پذیرفته شد. بنابراین در پژوهش حاضر از رگرسیون خطی با ضرایب فازی به منظور مدل بندی توابع انتقالی خاک استفاده شد. در مدل رگرسیون با ضرایب فازی، فرض بر آن است که اختلاف بین مقادیر مشاهده شده مربوط به متغیر وابسته و مقادیر برآورد شده توسط مدل، ناشی از ابهام در ساختار مدل می‌باشد. این ابهام، در ضرایب مدل که اعداد فازی هستند، منظور می‌شود. بدین ترتیب در این نوع مدل رگرسیون خطی، هدف آن است که بر پایه مجموعه مشاهدات، $(y_m,\underline{x}_m)$ و ... و $(y_1,\underline{x}_1)$ ، ضرایب (اعداد) فازی $\tilde{A}_0$ و $\tilde{A}_1$ و... و $\tilde{A}_n$ طوری به دست آید که:

$$\tilde{y}=f(\underline{x})=\tilde{A}_0+\tilde{A}_1x_1+\ldots+\tilde{A}_nx_n \qquad [۳]$$

یک مدل بهینه باشد، که در آن $\underline{x}_i=(x_{i1},\ldots,x_{in});\ i=1,\ldots,m$

[DOR: 20.1001.1.24763594.1384.9.2.5.5]

و x_{ij} مقدار مشاهده iام از متغیر jام است.

اگر فرض گردد که ضرایب $\tilde{A}_i = (a_i^C, s_i^L, s_i^R)_T;\ i=1,...,n$ اعداد فازی مثلثی نامتقارن باشند، آن گاه، بر پایه تعریف و ویژگی‌های مربوط به جمع، تفاضل و ضرب اسکالر اعداد فازی (۲)، $\hat{y}$ یعنی خروجی مدل فازی نیز یک عدد فازی مثلثی و به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{y} = (f^C(\underline{x}), f_s^L(\underline{x}), f_s^R(\underline{x}))_T \qquad [۴]$$

$$f^C(\underline{x}) = a_0^C + a_1^C x_1 + \ldots + a_n^C x_n$$
$$f_s^L(\underline{x}) = s_0^L + s_1^L x_1 + \ldots + s_n^L x_n$$
$$f_s^R(\underline{x}) = s_0^R + s_1^R x_1 + \ldots + s_n^R x_n$$
$$= k_0 s_0^L + k_1 s_1^L x_1 + \ldots + k_n s_n^L x_n$$

بنابراین تابع عضویت خروجی فازی $\hat{y}$ را که یک عدد فازی مثلثی است، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{y}(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{y - f^C(\underline{x})}{f_s^L(\underline{x})} & f^C(\underline{x}) - f_s^L(\underline{x}) \le y \le f^C(\underline{x}) \\ 1 - \dfrac{f^C(\underline{x}) - y}{f_s^R(\underline{x})} & f^C(\underline{x}) \le y \le f^C(\underline{x}) + f_s^R(\underline{x}) \end{cases}$$

[۵]

تعیین ضرایب فازی

در رگرسیون با ضرایب فازی(و مشاهدات غیر فازی)، هدف آن است که ضرایب $\tilde{A}_i$، $i=1,...,n$ ، به گونه‌ای تعیین شوند که: اولاً خروجی فازی، $\hat{y}$، برای تمامی مقادیر y_j، $j=1,...,m$، حداقل دارای درجه عضویتی به بزرگی h باشد:

$$\hat{Y}(y_j) \ge h \quad \text{و} \quad j=1,...,m \qquad [۶]$$

ثانیاً ابهام یا فازی بودن خروجی مدل حداقل ممکن باشد.

شرط اول تضمین می‌کند که در مدل نهایی، مقدار عضویت y_i یعنی iامین مقدار مشاهده شده متغیر وابسته در برآورد فازی آن توسط مدل، یعنی $\hat{y}(y_i)$، حداقل به اندازه h باشد. مقدار h توسط کاربر انتخاب می‌شود و می‌توان آن را به عنوان سطح اعتبار مدل تعبیر کرد (۱۷). شرط دوم نیز بیانگر این نکته است که ابهام در مقدار پیش بینی متغیر وابسته باید حداقل باشد. چون بر پایه هر مشاهده، یک خروجی از مدل خواهیم داشت، پس باید مجموع ابهام‌های خروجی‌ها را حداقل کنیم. به بیان دیگر باید مقدار زیر حداقل شود:

$$Z = m\left(S_0^L + S_0^R\right) + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(S_i^L + S_i^R\right)\sum_{j=1}^{m} x_{ji}\right] \qquad [۷]$$

که تابع هدف فوق را می‌توان برحسب ضریب کشیدگی به صورت زیر نوشت:

$$Z = m\left(1+k_0\right)S_0^L + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(1+k_i\right)s_i^L \sum_{j=1}^{m} x_{ji}\right] \qquad [۸]$$

خاطر نشان می شود که در پژوهش حاضر، آنالیز حساسیت (Sensitivity analysis) مدل بر پایه مقدار h و با توجه به مقادیر ابهام کل Z و شاخص اطمینان IC انجام شده است (۱۷ و ۲۳).

با توجه به روابط ۵ و ۶، محدودیت‌های مدل به صورت زیر به دست می‌آیند $(j=1,...,m)$:

$$1 - \frac{y_j - f^C(\underline{x_j})}{f_s^L(\underline{x_j})} \ge h \;\Rightarrow (1-h) f_s^L(\underline{x_j}) + f^C(\underline{x_j}) \ge y_j$$

$$1 - \frac{f^C(\underline{x_j}) - y_j}{f_s^R(\underline{x_j})} \ge h \;\Rightarrow (1-h) f_s^R(\underline{x_j}) - f^C(\underline{x_j}) \ge -y_i$$

[۹]

که با جای‌گذاری $f^C(\underline{x})$ و $f_s^L(\underline{x})$ و $f_s^R(x)$ در روابط فوق، محدودیت‌های مسئله به صورت زیر در می‌آیند $(j=1,...,m)$:

$$(1-h)s_0^L + (1-h)\sum_{i=1}^{n}\left(s_i^L x_{ji}\right) + a_0^C + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^C x_{ji}\right) \ge y_j$$

$$(1-h)k_0 s_0^L + (1-h)\sum_{i=1}^{n}\left(k_i s_i^L x_{ji}\right) - a_0^C - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^C x_{ji}\right) \ge -y_j$$

[۱۰]

باید توجه داشت که در نامعادله اخیر از رابطه $s_i^R=k_i s_i^L$

[DOR: 20.1001.1.24763594.1384.9.2.5.5]

استفاده شده است.

با توجه به رابطه ۹ مشخص می‌گردد که برای هر مشاهده دو محدودیت ایجاد می‌شود. پس مسأله یافتن ضرایب فازی مدل، معادل با حداقل سازی تابع هدف Z، با توجه به ۲m محدودیت تولید شده توسط m مشاهده است. بدین ترتیب با یک مسأله برنامه ریزی خطی رو به رو هستیم که به روش‌های مختلف از جمله روش سیمپلکس(Simplex method) قابل حل است (۹).

ارزیابی مدل

ارزیابی مدل‌های رگرسیون خطی با ضرایب فازی بر پایه معیار شاخص اطمینان (Index of confidence) (IC) صورت گرفت. در این نوع رگرسیون، معیار IC به صورت زیر تعریف می‌شود (۲۳):

$$IC = 1 - \frac{SSE}{SST} \qquad [11]$$

که در آن، SSE و SST به ترتیب مجموع مجذورات خطا و مجموع مجذورات کل رگرسیون فازی است:

$$SSE = 2\sum_{i=1}^{m}(y_j - \hat{Y}_i^c)^2$$

$$SST = \sum_{i=1}^{m}(y_j - \hat{Y}_j^L)^2 + \sum_{i=1}^{m}(\hat{Y}_j^R - y_j)^2$$

انتخاب مدل بهینه

در رگرسیون خطی با ضرایب فازی، مدل‌های مختلف با ضرایب کشیدگی متفاوت را می‌توان مورد توجه قرار داده و در نهایت مدلی را که دارای IC کوچک‌تری باشد، به عنوان مدل بهینه انتخاب کرد. البته در این زمینه باید یک سطح اعتبار مناسب را نیز در نظر گرفت.

نتایج و بحث

جدول ۱ داده‌های مربوط به متغیرهای مختلف مورد استفاده در مدل سازی را به همراه چند شاخص آماری آنها نشان می‌دهد.

نتایج به دست آمده از برازش دو تابع برآوردی خاک با استفاده از روش رگرسیون معمولی در جدول ۲ ارائه شده است.

نتایج حاصل از مدل تخمینی ظرفیت تبادل کاتیونی حاکی است که این متغیر با بیش از یک خصوصیت خاک همبسته است. در این مدل متغیرهای درصد شن و کربن آلی به عنوان متغیرهای توضیحی و در طی عملیات رگرسیون گام به گام انتخاب شدند. کلیه ضرایب مدل در سطح معنی دار قابل قبولی قرار دارند. دومین تابع پدوترانسفر، دربرگیرنده مدل سازی یک خصوصیت فیزیکی است. همان‌گونه که نتایج نشان می‌دهد، برای تخمین درصد رطوبت اشباع خاک می‌توان از متغیرهای درصد سیلت، درصد شن و میزان کربن آلی با قابلیت اعتماد آماری بالایی بهره جست. میانگین ریشه دوم خطا (Mean squared error) (MSE) برای توابع پدوترانسفر CEC و SP به ترتیب برابر ۱/۵۴ و ۲/۲۰ به دست آمد.

مدل‌های فوق‌الذکر با استفاده از روش رگرسیون فازی نیز برازش داده شدند (جدول ۳)، که در زیر توضیح داده می‌شوند.

مدل رگرسیون فازی ظرفیت تبادل کاتیونی

در برازش اولین مدل، با استفاده از ۲۵ زوج مشاهده، شامل سه متغیر ظرفیت تبادل کاتیونی، درصد کربن آلی و درصد شن، در قالب مدل رگرسیون فازی $\hat{Y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x + \tilde{A}_2 x_2$ اقدام شد. با فرض این که $\tilde{A}_0$ ، $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$ اعداد فازی مثلثی به صورت $\tilde{A}_0 = (a_0, S_0^L, k_0 S_0^L)_T$ و $\tilde{A}_1 = (a_1, S_1^L, k_1 S_1^L)_T$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, S_2^L, k_2 S_2^L)_T$ باشند، آن گاه برپایه رابطه ۸، تابع هدف به صورت زیر در می‌آید:

$$Z = (1 + k_0)\, S_0^{\,L} + (1 + k_1)\, S_1^{\,L} \sum_{j=1}^{25} x_{j1} + (1 + k_2)\, S_2^{\,L} \sum_{j=1}^{25} x_{j2} \qquad [12]$$

طبق رابطه ۱۰ و با توجه به ۲۵ مشاهده، تعداد ۵۰ محدودیت وجود خواهد داشت. به طور مثال، با استفاده از h=۰/۵، دو محدودیت متناظر با مشاهده اول (j=۱) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} &0/5 S_0^{\,L} + 0/5 S_1^{\,L} x_{11} + 0/5 S_2^{\,L} x_{12} + a_0^{\,C} + a_1^{\,C} x_1 + a_2^{\,C} x_{12} \geq y_1 \\ &0/5 k_0 S_0^{\,L} + 0/5 k_1 S_1^{\,L} x_{11} + 0/5 k_2 S_2^{\,L} x_{12} + a_0^{\,C} + a_1^{\,C} x_{11} + a_2^{\,C} x_{12} \geq -y_1 \end{aligned} \qquad [13]$$

با در اختیار داشتن تابع هدف (۱۲) و با توجه به

[DOR: 20.1001.1.24763594.1384.9.2.5.5]

جدول ۱. داده‌های مربوط به متغیرهای مختلف مورد استفاده در برازش توابع انتقالی خاک

نقاط مطالعاتی	رس(٪)	سیلت(٪)	شن(٪)	آهک(٪)	کربن آلی (٪)	ظرفیت تبادل کاتیونی (Cmol+/kg)	رطوبت اشباع (٪)
۱	۲۰	۴۵	۳۵	۱۲	۰/۸۸	۱۶/۵	۳۸
۲	۲۱	۴۲	۳۷	۱۳	۱/۱۳	۱۸/۶	۴۱
۳	۳۰	۴۳	۲۷	۱۳/۵	۱/۳۱	۱۹/۳	۴۸
۴	۳۰	۴۱	۲۹	۱۳/۵	۱/۹۸	۲۰/۳	۵۱
۵	۲۳	۳۹	۳۸	۸	۱/۰۲	۱۷/۳	۳۵
۶	۲۹	۳۹	۳۲	۱۱	۱/۲۹	۲۰/۴	۴۳
۷	۳۴	۳۷	۲۹	۱۳/۶	۱/۵۲	۱۹/۳	۵۴
۸	۱۷	۴۵	۱۸	۱۵/۶	۱/۳۳	۲۱/۹	۵۲
۹	۲۲	۳۸	۴۰	۱۷/۷	۱/۷۱	۱۵/۹	۴۵
۱۰	۲۶	۴۶	۲۸	۱۵	۲/۰	۱۸/۳	۵۰
۱۱	۴۷	۴۰	۱۳	۱۱/۳	۱/۶۸	۲۲/۶	۵۹
۱۲	۴۰	۴۱	۱۹	۱۹/۷	۲/۱۵	۲۳/۷	۶۲
۱۳	۲۸	۴۱	۳۱	۱۳	۳/۵۲	۲۴/۴	۶۰
۱۴	۲۷	۴۲	۳۱	۲۵/۲	۲/۳۳	۲۱/۸	۵۲
۱۵	۲۳	۵۰	۱۷	۱۳	۱/۷۱	۲۳/۸	۵۲
۱۶	۳۳	۵۳	۱۴	۱۵	۱/۱۴	۲۰/۸	۴۹
۱۷	۳۷	۴۴	۱۹	۱۴/۳	۰/۹۹	۱۷/۵	۵۰
۱۸	۲۹	۴۳	۲۸	۱۱	۱/۱۴	۱۷/۸	۴۴
۱۹	۳۰	۴۴	۲۶	۷	۱/۴۶	۲۰/۲	۴۹
۲۰	۲۶	۴۲	۳۲	۱۱/۲	۱/۸۱	۲۰/۰	۵۰
۲۱	۴۱	۴۹	۱۰	۱۴	۱/۳۸	۲۲/۸	۵۲
۲۲	۲۹	۴۳	۳۸	۱۰	۰/۸۴	۱۹/۱	۴۲
۲۳	۱۶	۳۵	۴۹	۱۲	۱/۴۸	۱۲/۱	۴۰
۲۴	۱۴	۴۴	۴۲	۱۰	۱/۰۸	۱۲/۸	۳۷
۲۵	۶/۳	۱۴	۷۹	۴/۶	۰/۳۶	۵/۳	۲۱
میانگین	۲۷/۱۳	۴۱/۶۰	۳۰/۴۴	۱۲/۹۶	۱/۴۹	۱۸/۹۰	۴۷/۰۱
میانه	۲۸/۰۰	۴۲/۰۰	۲۹/۰۰	۱۳/۰۰	۱/۳۸	۱۹/۳۰	۴۹/۰۰
انحراف معیار	۹/۰۲	۷/۰۱	۱۴/۰۷	۴/۱۰	۰/۶۲	۴/۲۰	۸/۸۰
ضریب چولگی	−۰/۰۲	−۲/۵	۱/۶	۰/۸۴	۱/۴	−۱/۵	−۰/۸۸
ضریب تغییرات(٪)	۳۳	۱۷	۴۶	۳۲	۴۲	۲۲	۱۹

[DOR: 20.1001.1.24763594.1384.9.2.5.5]

جدول ۲. نتایج حاصل از برازش توابع پدوترانسفر به روش رگرسیون معمولی

توابع پدوترانسفر	ضرایب مدل (اعداد داخل پرانتز سطح بحرانی مشاهده شده، p-value است)				R^2
	a	b	c	d	
CEC=a+b(Sand)+c(OC)	۲۱/۹۸۹	−۰/۲۲۲	۲/۴۶۹	_	۰/۸۵۰
	(۰/۰۰۰)	(۰/۰۰۰)	(۰/۰۰۰)		
KSP=a+b(Silt)+c(Sand)+d(OC)	۷۰/۸۴۰	−۰/۴۱۲	−۰/۵۷۵	۷/۲۴۹	۰/۹۳۳
	(۰/۰۰۰)	(۰/۰۰۳)	(۰/۰۰۰)	(۰/۰۰۰)	

جدول ۳. نتایج حاصل از برازش توابع پدوترانسفر به روش رگرسیون فازی

توابع پدوترانسفر	ضرایب مدل رگرسیون فازی (اعداد داخل پرانتز مقدار ابهام است)			
	$\widetilde{A}_۰$	$\widetilde{A}_۱$	$\widetilde{A}_۲$	$\widetilde{A}_۳$
$CEC=\widetilde{A}_۰+\widetilde{A}_۱(SAND)+\widetilde{A}_۲(OC)$	۲۱/۲۳	−۰/۱۸۳	۱/۹۶	_
	(۳/۲۸−۳/۲۸)	(۰/۰۷−۰/۰۵)	(۰/۰۰−۰/۰۰)	
$SP=\widetilde{A}_۰+\widetilde{A}_۱(SILT)+\widetilde{A}_۲(SAND)+\widetilde{A}_۳(OC)$	۶۸/۱۱	−۰/۴۲	۰/۵۴	۸/۵۲
	(۰/۰۰−۰/۰۰)	(۰/۰۴−۰/۰۴)	(۰/۲۲−۰/۲۲)	(۰/۰۰−۰/۰۰)

محدودیت‌های ۵۰ گانه متناظر با رابطه ۱۳، با استفاده از روش سیمپلکس اقدام به حداقل سازی تابع هدف گردید. با حل مسأله حداقل سازی، به ازای k های مختلف، مدل‌های مختلفی به دست آمد. در نهایت مدل با ضرایب فازی زیر که به ازای $k_۰=۱/۰, k_۱=۰/۷, k_۲=۱/۰$، به دست آمد، دارای بیشترین IC بین مدل‌های مختلف (با ضرایب مثلثی نامتقارن در سطح اعتبار ۰/۵) بود (جدول ۳):

$$\widetilde{A}_۰=(۲۱/۲۳,۳/۲۸,۳/۲۸)_T,$$
$$\widetilde{A}_۱=(-۰/۱۸۳,۰/۰۷۰,۰/۰۴۹)_T, \widetilde{A}_۲=(۱/۹۶,۰,۰)_T$$

بدین ترتیب مدل بهینه فازی، که IC آن برابر ۰/۹۰۱ است، به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}CEC &= (۲۱/۲۳,۳/۲۸,۳/۲۸)_T \\ &\quad -(۰/۱۸۳,۰/۰۷۰,۰/۰۴۹)_T\,SAND+(۱/۹۶,۰,۰)_T\,OC \\ &= (۲۱/۲۳,۳/۲۸,۳/۲۸)_T \\ &\quad -(۰/۱۸۳,۰/۰۷۰,۰/۰۴۹)_T\,SAND+۱/۹۶\,OC\end{aligned}$$

به بیان دیگر اگر مقادیر مشاهده شده شن و کربن آلی را به ترتیب ۳۵ و ۰/۸۸ درصد در نظر بگیریم (اولین نقطه مطالعاتی)، آن گاه با توجه به مدل برازش داده شده فوق (با درنظر گرفتن سطح اعتبار h=۰/۵)، مقدار ظرفیت تبادل کاتیونی حدوداً ۱۶/۵۵ درصد پیش بینی می‌شود، که در آن منظور از حدوداً ۱۶/۵۵، عدد فازی مثلثی نامتقارن $_T$(۵/۰۰ و۵/۷۳ و۱۶/۵۵) است. بدین معنی که امکان ندارد که مقدار CEC از ۱۱/۵۵ کمتر و از ۲۲/۲۸ بیشتر باشد. اگر هدف پیش بینی یک مقدار دقیق برای CEC باشد، آن گاه با قطعی سازی، به روش مرکز ثقل (۲۶)، مقدار عددی ۱۶/۴۲ گزارش می‌شود. برای یادآوری، مقدار اندازه‌گیری شده ظرفیت تبادل کاتیونی در نخستین نقطه مطالعاتی برابر ۱۶/۵ است.

باید به این نکته اشاره شود که در مسایل برنامه ریزی خطی فرض می‌شود که متغیرهای مسأله نامنفی هستند. ولی در مدل رگرسیون فازی، ضرایب می‌توانند مقادیر منفی اختیار کنند. به همین منظور لازم است در برنامه مربوط به حداقل سازی تابع Z، متغیرهای مربوط به مراکز ضرایب فازی به صورت

[DOR: 20.1001.1.24763594.1384.9.2.5.5]

جدول ۴. نتایج تجزیه و تحلیل حساسیت برای تابع پدوترانسفر ظرفیت تبادل کاتیونی

سطح اعتبار (h)	ضرایب مدل بهینه (پهنای ابهام راست، پهنای ابهام چپ، مرکز عدد فازی)	ابهام کل مدل (Z)	IC
۰/۱	y =(۲۱/۲۳ ,۱/۸۲, ۱/۸۲) + (–۰/۱۸۳, ۰/۰۴۵, ۰/۰۳۱) x_1 +(۱/۹۶, ۰, ۰) x_2	۱۴۹/۹۳	۰/۷۵۸۹
۰/۲	y = (۲۱/۲۳, ۲/۰۵, ۲/۰۵) + (–۰/۱۸۳, ۰/۰۵, ۰/۰۳۵) x_1 + (۱/۹۶, ۰, ۰) x_2	۱۶۸/۶۷	۰/۷۹۸۰
۰/۳	y = (۲۱/۲۳, ۲/۳۵, ۲/۳۵) + (–۰/۱۸۳, ۰/۰۶۸, ۰/۰۵۲) x_1+ (۱/۹۶, ۰, ۰) x_2	۱۹۲/۷۷	۰/۸۴۸۳
۰/۴	y = (۲۱/۲۳, ۲/۷۴, ۲/۷۴) + (–۰/۱۸۳, ۰/, ۰/۰۵۲) x_1+ (۱/۹۶, ۰, ۰) x_2	۲۲۴/۹۰	۰/۸۷۷۴
۰/۵	y = (۲۱/۲۳, ۳/۲۸, ۳/۲۸) + (–۰/۱۸۳, ۰/۰۷, ۰/۰۴۹) x_1 + (۱/۹۶, , ۰) x_2	۲۶۹/۸۸	۰/۹۰۱۰
۰/۶	y = (۲۱/۲۳, ۴/۱۱, ۴/۱۱) + (–۰/۱۸۳, ۰/۱۰, ۰/۰۷۰) x_1 +(۱/۹۶, ۰, ۰) x_2	۳۳۷/۳۵	۰/۹۴۰۶
۰/۷	y = (۲۱/۲۳, ۵/۴۷, ۵/۴۷) +(–۰/, ۰/۱۴, ۰/۰۹۸) x_1 +(۱/۹۶, ۰, ۰) x_2	۴۴۹/۸۰	۰/۹۶۶۹
۰/۸	y = (۲۱/۲۳, ۸/۲۱, ۸/۲۱) + (–۰/۱۸۳, ۰/۲۰, ۰/۱۴) x_1 +(۱/۹۶, ۰, ۰) x_2	۶۷۴/۷۰	۰/۹۸۴۴
۰/۹	y = (۲۱/۲۳, ۱۶/۴۲, ۱۶/۴۲) + (–۰/۱۸۳, ۰/, ۰/۲۹) x_1 +(۱/۹۶, ۰, ۰) x_2	۱۳۴۹/۳۹	۰/۹۶۶۱

جدول۵. نتایج تجزیه و تحلیل حساسیت برای تابع پدوترانسفر رطوبت اشباع خاک

سطح اعتبار (h)	ضرایب مدل بهینه (پهنای ابهام راست، پهنای ابهام چپ، مرکز عدد فازی)	ابهام کل مدل (Z)	IC
۰/۱	y = (۶۸/۱۱, ۰/۰, ۰/۰) + (–۰/۴۲, ۰/۰۲, ۰/۰۲) x_1+(–۰/۵۴, ۰/۱۳, ۰/۱۳) x_2 +(۸/۵۲, ۰/۰, ۰/۰)x_3	۱۱۷/۸۷	۰/۸۳۸۳
۰/۲	y = (۶۸/۱۱, ۰/۰, ۰/۰) + (–۰/۴۲, ۰/۰۲, ۰/۰۲) x_1+(–۰/۵۴, ۰/۱۴, ۰/۱۴) x_2 +(۸/۵۲, ۰/۰, ۰/۰) x_3	۱۳۲/۶۰	۰/۸۵۴۸
۰/۳	y = (۶۸/۱۱, ۰/۰, ۰/۰) + (–۰/۴۲, ۰/۰۳, ۰/۰۳) x_1+(–۰/۵۴, ۰/۱۶, ۰/۱۶) x_2 +(۸/۵۲, ۰/۰, ۰/۰)x_3	۱۵۱/۵۵	۰/۸۹۳۳
۰/۴	y = (۶۸/۱۱, ۰/۰, ۰/۰) + (–۰/۴۲, ۰/۰۳, ۰/۰۳)x_1+(–۰/۵۴, ۰/۱۹, ۰/۱۹)x_2 +(۸/۵۲, ۰/۰, ۰/۰)x_3	۱۷۶/۸۱	۰/۹۱۷۸
۰/۵	y = (۶۸/۱۱, ۰/۰, ۰/۰) + (–۰/۴۲, ۰/۰۴, ۰/۰۴)x_1+(–۰/۵۴, ۰/۲۲, ۰/۲۲)x_2 +(۸/۵۲, ۰/۰, ۰/۰)x_3	۲۱۲/۱۷	۰/۹۴۰۰
۰/۶	y = (۶۸/۱۱, ۰/۰, ۰/۰) + (–۰/۴۲, ۰/۰۵, ۰/۰۵)x_1+(–۰/۵۴, ۰/۲۹, ۰/۲۹)x_2 +(۸/۵۲, ۰/۰, ۰/۰)x_3	۲۵۶/۲۱	۰/۹۶۳۹
۰/۷	y = (۶۸/۱۱, ۰/۰, ۰/۰) + (–۰/۴۲, ۰/۰۶, ۰/۰۶)x_1+(–۰/۵۴, ۰/۳۸, ۰/۳۸)x_2 +(۸/۵۲, ۰/۰, ۰/۰)x_3	۳۵۳/۶۱	۰/۹۷۸۱
۰/۸	y = (۶۸/۱۱, ۰/۰, ۰/۰) + (–۰/۴۲, ۰/۰۹, ۰/۰۹)x_1+(–۰/۵۴, ۰/۵۷, ۰/۵۷)x_2 +(۸/۵۲, ۰/۰, ۰/۰)x_3	۵۳۰/۴۲	۰/۹۹۰۱
۰/۹	y = (۶۸/۱۱, ۰/۰, ۰/۰) + (–۰/۴۲, ۰/۱۸, ۰/۱۸) x_1+(–۰/۵۴, ۱/۲۰, ۱/۲۰)x_2 +(۸/۵۲, ۰/۰, ۰/۰)x_3	۱۰۶۰/۸۴	۰/۹۹۷۱

مجموع دو متغیر مثبت منظور گردند. سپس، تفاضل مقادیر این متغیرها که از جواب بهینه سازی حاصل می‌شود، به عنوان مراکز ضرایب در نظر گرفته شوند.

مدل رگرسیون فازی رطوبت اشباع خاک

در انتخاب مدل مناسب رگرسیون فازی برای رطوبت اشباع خاک، مشابه با روند بالا عمل شد. در نهایت، مدل با ضرایب فازی زیر که به ازای $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = ۱/۰$ به دست آمد (یعنی یک مدل با ضرایب فازی متقارن) دارای بیشترین IC (در سطح اعتبار ۰/۵) بود. (جدول ۳):

$$\tilde{A}_0 = (۶۸/۱۱,۰,۰)_T, \tilde{A}_1 = (-۰/۴۲,۰/۰۴,۰/۰۴)_T,$$
$$\tilde{A}_2 = (-۰/۵۴,۰/۲۲,۰/۲۲)_T, \tilde{A}_3 = (۸/۵۲,۰,۰)_T$$

بدین ترتیب مدل بهینه فازی، که IC آن برابر ۰/۹۴ بود، به دست آمد:

$$\begin{aligned} SP &= (۶۸/۱۱,۰,۰)_T - (۰/۴۲,۰/۰۴,۰/۰۴)_T\,SILT \\ &- (۰/۵۴,۰/۲۲,۰/۲۲)_T\,SAND + (۸/۵۲,۰,۰)_T\,OC \\ &= ۶۸/۱۱ - (۰/۴۲,۰/۰۴,۰/۰۴)_T\,SILT \\ &- (۰/۵۴,۰/۲۲,۰/۲۲)_T\,SAND + ۸/۵۲OC \end{aligned}$$

همان‌گونه که از جدول ۳ ملاحظه می‌شود، پارامترهای محاسبه شده در مدل های رگرسیون فازی به صورت اعداد فازی هستند که در برگیرنده مقدار مرکزی و هم چنین درجه

[DOR: 20.1001.1.24763594.1384.9.2.5.5]

ابهام و یا عدم قطعیت امکانی آنها می‌باشد. این ابهام‌ها می‌توانند متقارن و یا نامتقارن باشند. به طور مثال، در تابع انتقالی مربوط به ظرفیت تبادل کاتیونی، ضریب متغیر شن دارای ابهام با پهنای نامتقارن است. بدین ترتیب که پهنای چپ ابهام، که دربرگیرنده مقادیر کوچک‌تر شن است، بزرگ‌تر و کشیده‌تر از پهنای راست، منطبق با مقادیر بزرگ‌تر شن، است.

تجزیه و تحلیل حساسیت

به منظور ارزیابی مدل‌های حاصل از رگرسیون فازی، اقدام به تجزیه و تحلیل حساسیت بر پایه سطوح اعتبار h و محاسبه مقدار کل ابهام Z و مقدار شاخص اطمینان مدل‌ها شد. نتایج در جداول ۴ و ۵ ارائه شده‌اند. به طورکلی، بزرگ شدن مقدار h دارای سه اثر است: اولاً سطح اعتبار مدل بالا می‌رود. زیرا مدل به دست آمده با h های بزرگ، با امکان بیشتری نقاطی را که فرایند مدل‌سازی مبتنی برآنها بوده است، شامل می‌شود. ثانیاً این کار باعث می‌گردد که ابهام در مقادیر پیش بینی و در نتیجه مقدار کل ابهام مدل، Z، بزرگ تر شود هم‌چنین باعث می‌شود مقدار شاخص اطمینان مدل افزایش یابد. نتایج نشان می‌دهد که این تأثیر تا h های حدود ۰/۷ تقریباً خطی است و از آن پس شتاب بیشتری می‌گیرد. طبیعی است که کوچک انتخاب کردن h تأثیری معکوس داشته باشد. در این وضعیت، از یک طرف ابهام کل مدل، Z، کوچک می‌شود و بنابراین یک مدل دقیق‌تر به دست می‌آید، و از طرف دیگر سطح اعتبار مدل و مقدار شاخص اطمینان کاهش می‌یابد.

همان‌گونه که از جداول مشاهده می‌شود، تغییر مقادیر h تأثیری بر روی مراکز (مقدار میانی) اعداد فازی (ضرایب مدل) ندارد و تنها پهناهای اعداد فازی تغییر می‌کنند. به طورکلی انتخاب سطح اعتبار مدل و در نتیجه مقدار ابهام آن، در اختیار کاربر است که براساس شناخت و آگاهی وی از پدیده و سیستم مورد مطالعه و توازن مورد نظر بین اعتبار و ابهام مدل انتخاب می‌شود. البته می‌توان سطح اعتبار h=۰/۵ را به عنوان یک سطح اعتبار معقول و متداول در نظر گرفت. گرچه، برای داده‌های مورد بررسی، انتخاب سطح اعتبار h=۰/۶ نیز به دلیل IC بالا و افزایش اندک Z موجه به نظر می‌رسد. برای مطالعه بیشتر درباره انتخاب مقدار h می‌توان به منبع (۱۷) مراجعه نمود.

نتیجه‌گیری

در بررسی سیستم‌هایی که روابط بین متغیرهای سیستم، نادقیق و مبهم است، در نظر گرفتن ساختار فازی برای مدل سازی سیستم ضروری به نظر می‌رسد. در مورد توابع انتقالی خاک، این ساختار را می‌توان به صورت یک تابع خطی فازی که پارامترهای آن اعداد فازی تعیین می‌شوند، در نظر گرفت. در بسیاری از موارد به دلیل عدم تقارن در نحوه تأثیر متغیرها، باید از ضرایب نامتقارن در مدل سازی‌ها استفاده کرد. مشکلات و محدودیت‌های موجود در رابطه با کیفیت و اندازه (تعداد) داده‌های مورد استفاده در برازش توابع پدوترانسفر و هم چنین ماهیت ابهامی مدل‌ها در علوم خاک را می‌توان از عوامل ترغیب‌کننده خاک‌شناسان در به کارگیری روش رگرسیون فازی قلمداد کرد.

به کارگیری اعداد فازی غیرمثلثی مانند اعداد فازی نرمال و نمایی و تأثیر آنها در نتایج به دست آمده، بررسی تأثیر اندازه نمونه در نتایج رگرسیون فازی و هم چنین استفاده از روش‌های رگرسیون فازی برپایه داده‌های فازی، از چالش‌های تحقیقاتی پیش روی متخصصان خاک‌شناسی کشور خواهد بود.

سپاسگزاری

بدین‌وسیله از معاونت‌های پژوهشی دانشگاه صنعتی اصفهان و دانشگاه شهرکرد به خاطر تأمین هزینه‌های طرح سپاسگزاری می‌شود. هم‌چنین از سرکار خانم مهندس مریم نصیری کارشناس ارشد نساجی به خاطر کمک در آنالیز داده‌ها قدردانی می‌گردد.

[DOR: 20.1001.1.24763594.1384.9.2.5.5]

منابع مورد استفاده

۱. بزرگوار، ت. و س. م. طاهری. ۱۳۸۳. رگرسیون کمترین مربعات فازی با استفاده از عملگرهای حافظ شکل. مجموعه مقالات پنجمین کنفرانس سیستم‌های فازی ایران. دانشگاه امام حسین(ع). صفحه ۶۵۳-۶۶۰.

۲. طاهری، س. م. ۱۳۷۸. *آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی*. انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد.

۳. مجدی، س.، س. م. طاهری و م. ح. علامت ساز. ۱۳۸۰. رگرسیون خطی با ضرایب فازی. مجموعه مقالات ششمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه تربیت مدرس. صفحه: ۳۳۴-۳۱۹.

۴. محمدی، ج. و ج. گیوی. ۱۳۸۰. ارزیابی تناسب اراضی برای گندم آبی در منطقه فلاورجان (اصفهان) با استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی. علوم و فنون کشاورزی و منابع طبیعی ۵ (۱) : ۱۱۳-۱۱۶.

5. Bouma, J. 1989. Using soil survey data for quantitative land evaluation Adv. Soil Sci. 9: 177-213.
6. Burrough, P. A. 1989. Fuzzy mathematical methods for soil survey and land evaluation. J. Soil Sci. 40: 477-492.
7. Celmins, A. 1987. Least squares model fitting to fuzzy vector data. Fuzzy Sets Sys. 22: 260-269.
8. Diamond, P. 1987. Least squares fitting of several fuzzy variables. Proc. of the Second IFSA Congress, Tokyo, Japan, pp: 20-25.
9. Gass, S I. 1975. Linear Programming. McGraw-Hill Pub., USA.
10. Kim, K. J., H. Moskowitz and M. Koksalan. 1996. Fuzzy versus statistical linear regression. Euro. J. Oper. Res. 92: 417-434.
11. Klute, A. 1986. Methods of Soil Analysis. Part 1. Am. Soc. Agron. USA.
12. McBratney, A. B. and I. O. A. Odeh. 1997. Application of fuzzy sets in soil science: fuzzy logic, fuzzy measurements and fuzzy decisions. Geoderma 77: 85-113.
13. Minasny, B., A. B. McBratney and K. L. Bristow. 1999. Comparison of different approaches to the development of pedotransfer functions for water-retention curves. Geoderma 93: 225-253.
14. Minasny, B. and A. B. McBratney. 2002. The Neuro-m method for fitting neural network parametric pedotranfer functions. Soil Sci. Soc. Am. J. 66: 352-361.
15. Mohammadi, J. and S. M. Taheri. 2004. Pedomodels fitting with fuzzy least squares regression. Iranian J. Fuzzy Sys. 1 (2): 45-61.
16. Mohammadi, J. 2003. Variation and uncertainty in environmental sciences. Proc. of the Fourth Seminar on Fuzzy Sets and Its Applications, University of Mazandaran, Babolsar, pp: 136-141.
17. Moskowitz, H. and K. Kim. 1993. On assessing the H value in fuzzy linear regression. Fuzzy Sets Sys. 58: 303-327.
18. Pachapsky, Y. A., D. Timlin and G. Varallyay. 1996. Artificial neural networks to estimate soil water retention from easily measurable data. Soil Sci. Soc. Am. J. 60: 727-733.
19. Page, A. C. 1986. Methods of Soil Analysis. Part 2. Am. Soc. Agron. USA.
20. Taheri, S. M. 2003 Trends in fuzzy statistics. Aust. J. Stat. 32: 239-257.
21. Taheri, S. M. and J. Mohammadi. 2004. Application of fuzzy regression in soil science. Proc. of the 8th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics. 6: 311-316. Florida. USA.
22. Tanaka, H., S. Uejima and K. Asai. 1982. Linear regression analysis with fuzzy model. IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 12: 903-907.
23. Wang, H. F. and R C. Tsaur. 2000. Insight of a fuzzy regression model. Fuzzy Sets Sys. 12: 355-369.
24. Yen, K. K., S. Ghoshray and G. Roig. 1999. Linear regression model using triangular fuzzy number. Fuzzy Sets Sys. 106: 166-177.
25. Zadeh, L. A. 1965. Fuzzy sets. Inform. and Control 8: 338-353.
26. Zimmermann, H. J. 1996. Fuzzy Set Theory and Its Applications. Kluwer Academic Pub., Boston.

[DOR: 20.1001.1.24763594.1384.9.2.5.5]