

تخمین پارامترهای هیدرولیکی خاک‌های دارای اشباع‌شدگی متغیر به روش مدل سازی معکوس و بهره‌گیری از داده‌های توزیع مجدد رطوبت

محمد نخعی و وهاب امیری^{*۱}

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۷/۸ ؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۱/۱)

چکیده

مدل سازی جریان آب و انتقال مواد محلول در محیط‌های متخلخل دارای اشباع‌شدگی متغیر نیازمند اطلاعات تکمیلی و دقیق خصوصیات هیدرولیکی خاک می‌باشد. خصوصیات هیدرولیکی که در این مطالعه با استفاده از حل معکوس تعیین شده‌اند هدایت هیدرولیکی غیراشباع $K(h)$ و تابع نگهداشت آب $\theta(h)$ می‌باشد. در روش حل معکوس فرض می‌شود که $K(h)$ و $\theta(h)$ را همانند پارامترهای انتقال به صورت هم‌زمان و با استفاده از داده‌های جریان ناپایدار و به کارگیری آنها در حل معکوس معادلات حاکم بر جریان و انتقال مواد تعیین کرد. به منظور دستیابی به نتایجی واحد، قابل شناسایی و پایدار در موقعیت‌ها و شرایط مختلف آزمایشی، آزمایش عددی جدید توزیع مجدد مورد ارزیابی و استفاده قرار گرفت. برای مطالعه شکل تابع هدف در حالت کمترین مقدار آن، سطوح پاسخ برای پارامترهای تخمینی تهیه شد. حساسیت خروجی‌های مدل نسبت به تغییر پارامترهای ورودی نیز محاسبه و تحلیل شد. نتایج آزمایش توزیع مجدد نشان می‌دهد زمانی که متغیرهای خروجی‌های مدل به اندازه کافی به پارامترهای بهینه شده حساس نیست عدم یگانگی جواب افزایش می‌یابد. مقادیر تخمینی پارامترها به بزرگی خطای داده‌های اندازه‌گیری شده حساس است. در این آزمایش، تخمین پارامتر براساس داده‌های بار فشار حل یگانه‌ای را در اختیار قرار می‌دهد. به دلیل جریان ترجیحی در نمونه، مشاهدات کشش سنجی می‌تواند نتایج اشتباهی برای حل معکوس مساله مورد نظر ارائه دهد. استفاده از اطلاعات هدایت هیدرولیکی می‌تواند یگانگی جواب را بیشتر کرده و خطای تخمین پارامترهای تجربی α و n را کاهش دهد. آنالیز حساسیت می‌تواند ابزار مفیدی برای تعیین زمان بهینه و توزیع موقعیت نقاط مشاهداتی در آزمایش باشد.

واژه‌های کلیدی: تخمین پارامتر، حل معکوس، تابع هدف، سطح پاسخ

۱. گروه زمین شناسی کاربردی، دانشکده علوم زمین، دانشگاه خوارزمی، تهران

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: vahab.amiri@gmail.com

مقدمه

مدیریت بهینه منابع آبی و خاکی نیازمند مدل سازی ریاضیاتی می باشد که قادر به شبیه سازی جریان و انتقال آلودگی باشد. این مدل ها به وضعیت فیزیکی و هندسه محیط، شرایط مرزی و خصوصیات هیدرولیکی خاک از جمله توابع هدایت هیدرولیکی و نگهداشت خاک وابسته می باشند (۴).

اطلاع از ویژگی های هیدرولیکی خاک های غیراشباع مانند هدایت هیدرولیکی غیراشباع برای شبیه سازی جریان آب و مواد محلول در محیط متخلخل ضروری می باشد. مبنای تمامی روش های حل عددی برای شبیه سازی جریان و انتقال مواد محلول در محیط متخلخل معادله دیفرانسیلی ریچاردز می باشد (۲).

تحلیل جریان در منطقه غیراشباع خاک بسیار پیچیده بوده و به دو تابع غیرخطی $K(h)$ و $\theta(h)$ که پارامترهای هیدرولیکی خاک نام دارند بستگی دارد (۲). در این مطالعه از فرم اصلاح شده مدل ون گنوختن (۸) که توسط فوگل و همکاران (۹) برای توابع غیرخطی $K(h)$ و $\theta(h)$ ارائه شد؛ استفاده شده است. توابع غیرخطی یاد شده به صورت زیر می باشند:

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + |\alpha h|^n]^m} & h < h_s \\ \theta_s & h \geq h_s \end{cases}$$

$$K_r = S_e \left[\frac{1 - F(\theta)}{1 - F(\theta_s)} \right]^2$$

که

$$K(h) = \begin{cases} K_s K_r(h) & h < h_s \\ K_s & h \geq h_s \end{cases}$$

$$F(\theta) = \left[1 - \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_m - \theta_r} \right)^{1/m} \right]^m$$

$$F(\theta) = \left[1 - \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_m - \theta_r} \right)^{1/m} \right]^m$$

که در روابط فوق $k_r(h)$ تابع هدایت هیدرولیکی نسبی، k_s هدایت هیدرولیکی اشباع و h_s مکش حد آستانه ورود هوا می باشند. در این مدل تحلیلی، توابع غیرخطی $K(h)$ و $\theta(h)$ را به وسیله شش پارامتر هیدرولیکی $\theta_r, \theta_s, \theta_m, \alpha, n$ و تعریف می کنند که θ_r رطوبت باقیمانده، θ_s رطوبت اشباع، θ_m پارامتر رطوبتی تجربی (empirical water content parameter)، k_s هدایت هیدرولیکی اشباع و α و n پارامترهای شکل می باشند.

تخمین پارامترهای مؤثر جریان در مدل محیط های غیراشباع مبتنی بر مشاهدات صورت گرفته در مقیاسی کوچک تر از مقیاس واقعی مدل می باشد که این موجب ایجاد مشکلاتی در تخمین پارامترهای خاک های ناهمگن می شود. بنابراین باید سعی کرد مسیری را برای مطالعه در پیش گرفت که از این خطا و مشکل ذکر شده دوری کرد (۳).

عموماً اندازه گیری مستقیم خصوصیات هیدرولیکی برای جریان غیراشباع وقت گیر و پرهزینه می باشد. در روش مستقیم اندازه گیری پارامترهای هیدرولیکی خاک با اندازه گیری میزان نفوذ از سطح یک نمونه خاک در آزمایشگاه بعد از پایدار شدن جریان انجام می گیرد. استفاده از روش های غیرمستقیم تخمین خواص هیدرولیکی محیط متخلخل جایگزینی مناسب برای روش های وقت گیر و پرهزینه مستقیم می باشد (۱).

یکی از روش های غیرمستقیم که مورد توجه محققین علم فیزیک خاک و جریان در محیط متخلخل قرار گرفته، روش حل معکوس تخمین پارامترهای مورد بحث می باشد. در این روش داده های حاصل از یک آزمایش غیرماندگار که "مشاهدات" نام دارند با روش حداقل مربعات براساس الگوریتم مارکورت بر داده های استخراج شده از مدل تشریح کننده پدیده مورد آزمایش برهم منطبق شده و پارامترهای محیط متخلخل تخمین زده می شود (۵).

تخمین پارامترهای هیدرولیکی محیط متخلخل به روش حل معکوس بدین صورت است که با انتخاب یک تابع هدف که متشکل از خروجی های مدل حاکم بر جریان و مشاهدات

شکل‌های ۱ و ۲ خصوصیات هیدرولیکی واقعی خاک‌های مورد مطالعه را نشان می‌دهد.

ب) برداشت و تهیه داده

با استفاده از پارامترهای واقعی تعریف شده در بالا، مشاهدات ساختگی بار فشار و محتوی رطوبتی برای خاک‌های مورد مطالعه تولید شد. بار فشاری ثبت شده از سطح بالایی نمونه اشباع (نمونه ۱) و سطح زیرین نمونه خشک (نمونه ۲) برای حل پیشرو مساله با استفاده از برنامه WS_1D_INV در زمان‌های تعیین شده مورد استفاده قرار گرفت. مشاهدات ساختگی بار فشار با استفاده از خطاهای تصادفی که دارای توزیع نرمال بود دستکاری شده که به این طریق بتوان خطای اندازه‌گیری واقعی را شبیه‌سازی کرد. انحراف معیار خطاهای اعمال شده بر اندازه‌گیری‌های ساختگی برابر یک سانتی‌متر انتخاب شد.

ج) حل معکوس مساله

در این مطالعه تخمین دو پارامتر تجربی (empirica parameter) a و n صورت گرفت و فرض بر این بود که سایر پارامترها معلوم بوده و در طول فرآیند بهینه‌سازی مساوی با مقادیر واقعی تعریف شده است. چهار تخمین اولیه از پارامترهای مورد نظر [0/03, 1/5), (0/03, 3/1), (0/13, 1/5), (0/13, 3/1)] برای گوشه‌های یک محدوده مستطیلی از α و n برای اجرای برنامه در نظر گرفته شد. استفاده از مقادیر اولیه تخمین‌ها این امکان را فراهم می‌کند که یگانگی فرآیند تخمین پارامتر در حل معکوس را مورد ارزیابی قرار گیرد.

داده‌های مشاهداتی تولید شده با حل پیشرو در تابع هدف (Φ) (objective function) وارد شد. در این مطالعه دو سناریو دنبال شد. در سناریوی اول داده‌ها بدون اضافه کردن خطا مورد استفاده قرار گرفت و این در حالی است که در سناریوی دوم داده‌ها با خطاهای تصادفی دارای توزیع نرمال مورد استفاده قرار گرفت. در این مطالعه، برنامه WS_1D_INV برای هر یک از مقادیر اولیه a و n یک بار اجرا شد. نتایج مربوط به ۴ بار اجرای برنامه در جدول ۱ ارائه شده است. در این مورد خطاها به مشاهدات اضافه نشده‌اند.

اندازه‌گیری شده آزمایشگاهی و کمینه کردن آن به‌ازای پارامترهای مجهول در مدل یک سری مقادیر اولیه حدسی جایگزین گردیده و محاسبات با تغییر این پارامترها در جهت کمینه کردن تابع هدف ادامه می‌یابد تا جاییکه برازش خروجی‌های مدل و مشاهدات قابل قبول باشد (۷). بنابراین در مسائل معکوس، هدف پیدا کردن یک بردار بهینه p^* می‌باشد به‌گونه‌ای که تابع هدف $g(p)$ را به‌نحوی کاهش دهد که در بهترین حالت، $(v(p^*))$ محاسباتی $= (v)$ مشاهداتی (۲).

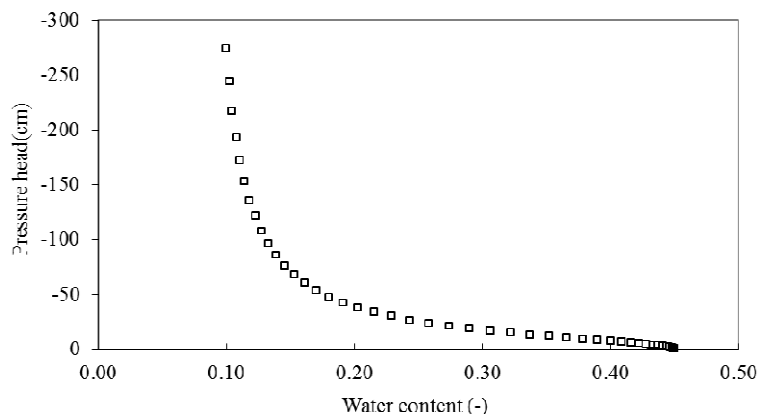
مواد و روش‌ها

الف) توصیف خصوصیات خاک و فرآیند مورد نظر

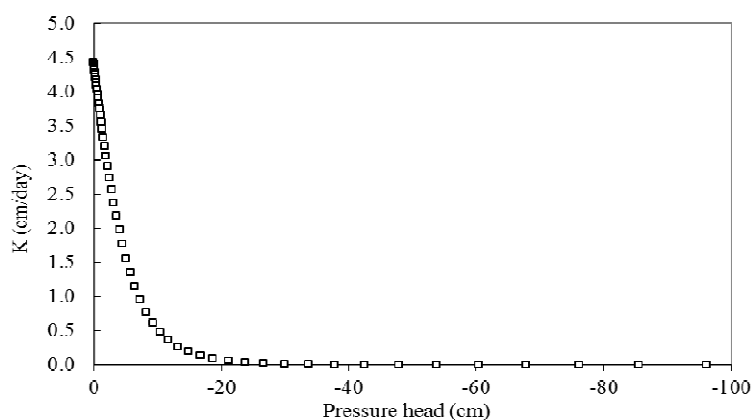
در این آزمایش از دو نمونه مغزه خاک دست نخورده و مشابه که در یک زمان و از عمق مشابهی تهیه شده بود استفاده شد. در این مطالعه فرض شد که پدیده پس‌ماند (hysteresis) در خاک وجود ندارد. نمونه‌های تهیه شده دارای ارتفاع ۶ سانتی‌متر و قطر داخلی ۸ سانتی‌متر می‌باشند. یکی از این نمونه‌ها (نمونه ۱) با آب اشباع شده و نمونه دیگر (نمونه ۲) تا مقدار قابل قبولی خشک شد (در اندازه‌ای که کشش‌سنج (tensiometer) قادر به نمایش عدد باشد). در این مطالعه دو کشش‌سنج برای ثبت بار فشار مورد استفاده قرار گرفت. یکی از کشش‌سنج‌ها در سطح بالایی نمونه ۱ و کشش‌سنج دیگر در سطح زیرین نمونه ۲ نصب شد. سپس آزمایش توزیع مجدد با قرارگیری نمونه اشباع شده ۱ روی نمونه خشک ۲ و ثبت بار فشار توسط دو کشش‌سنج نصب شده شروع و پیگیری شد.

شرایط اولیه برای نمونه ۱ به صورت بار فشار تعادلی در تمامی پروفیل و $h=0$ در سطح زیرین آن و برای نمونه ۲ نیز شرایط تعادلی با $h=-300$ در مرز زیرین آن در نظر گرفته شد. شرایط مرزی بدون شار برای سطح بالایی نمونه ۱ و سطح زیرین نمونه ۲ در نظر گرفته شد. پارامترهای واقعی این نمونه‌های خاک به صورت زیر است:

$$\theta_r = 0.08, \theta_s = 0.45, \theta_m = 0.45, K_s = 4/23 \text{ cm/hr}, \alpha = 0.08 \text{ cm}^{-1}, n = 1/95$$



شکل ۱. منحنی نگهداشت واقعی خاک فرضی در آزمایش توزیع مجدد



شکل ۲. تابع هدایت هیدرولیکی واقعی خاک فرضی استفاده شده در آزمایش توزیع مجدد

جدول ۱. نتایج تخمین پارامتر (داده‌ها بدون خطا مورد استفاده قرار گرفته است)

R ²	تابع هدف	مقدار بهینه		مقدار اولیه		اجرای برنامه
		n	α	n	α	
۰/۹۹۹۹۹۹۸۶	۰/۰۹۶۴	۱/۹۴۹۳	۰/۰۸۰۰	۳/۱	۰/۰۳	۱
۰/۹۹۹۹۹۲۳۲۹	۴۶/۰۴۶۰	۲/۰۵۴۳	۰/۰۷۴۴	۱/۵	۰/۰۳	۲
۰/۹۹۹۹۹۶۶۹۰	۲۹/۲۵۶۰	۲/۰۳۶۳	۰/۰۷۳۶	۳/۱	۰/۱۳	۳
۰/۹۹۹۹۹۷۴۴۴	۳۱/۱۶۸۰	۲/۰۲۰۷	۰/۰۷۲۵	۱/۵	۰/۱۳	۴

خوبی بین مقادیر واقعی و داده‌های بار فشار بهینه شده وجود دارد. شکل ۴ بار فشار تولید شده با استفاده از پارامترهای هیدرولیکی واقعی خاک و تخمین اولیه پارامترهای مورد نظر

مقایسه مقادیر واقعی و تخمین‌های بهینه شده اولیه داده‌های بار فشار در سطح بالایی نمونه ۱ (عمق صفر سانتی‌متر) در شکل ۳ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که برازش و تطابق

در حل پیشرو از پارامترهای واقعی ذکر شده در بالا استفاده شد. انحراف معیار خطاها برابر یک سانتی متر ($\alpha_h = 1$) در نظر گرفته شد.

شکل ۸ داده‌های ساختگی بار فشار را در سطح بالایی نمونه (عمق صفر سانتی متری) را برای دسته پارامترهای بهینه شده و تخمین‌های اولیه نمایش می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که برازش خوبی بین داده‌های بار فشار ساختگی (واقعی) و سطوح پاسخ مدل بهینه شده وجود دارد.

شکل ۹ مشاهدات بار فشار تولید شده با استفاده از پارامترهای هیدرولیکی واقعی خاک که دارای خطاهای تصادفی می‌باشند را نشان می‌دهد. در این حالت از تخمین اولیه ($\alpha = 0.03$ ، $n = 3/1$) و نتایج بهینه شده مدل که با استفاده از حل معکوس مساله در سطح زیرین نمونه ۲ به دست آمد؛ استفاده شد. در جدول ۲ می‌توان نتایج تخمین پارامتر و اجرای مدل در قالب سناریوی دوم را مشاهده کرد.

شکل ۱۰ منحنی نگهداشت واقعی، به دست آمده با تخمین اولیه ($\alpha = 0.03$ ، $n = 3/1$) و بهینه شده را نمایش می‌دهد. توابع هدایت هیدرولیکی خاک در حالت واقعی، به دست آمده با تخمین اولیه ($\alpha = 0.03$ ، $n = 3/1$) و بهینه شده را می‌توان در شکل ۱۱ ملاحظه کرد.

سطح پاسخ تابع هدف برای سناریوی دوم در دامنه α -n تهیه شد. نتایج بهینه شده که در جدول ۲ ارائه شده است نشان می‌دهد تطابق و همگرایی خوبی بین مقادیر به دست آمده و پارامترهای واقعی در سطح α -n با (۱/۹۵، ۰/۰۸) وجود دارد. شکل ۱۲ سطح پاسخ تابع هدف را در سطح α -n نمایش می‌دهد (داده‌های بار فشار با خطای یک سانتی متری استفاده شده‌اند).

سطح پاسخ نشان می‌دهد با وجودی که داده‌ها دارای خطای تصادفی هستند ولی استفاده از آزمایش توزیع مجدد می‌تواند منجر به دستیابی نتایج مناسب و قابل قبولی در تخمین پارامترهای هیدرولیکی خاک با بهره‌گیری از روش حل معکوس شود.

($\alpha = 0.03$ ، $n = 3/1$) و بار فشار به دست آمده با استفاده از حل معکوس در سطح زیرین نمونه ۲ را نمایش می‌دهد.

شکل ۵ منحنی نگهداشت تهیه شده با استفاده از مقادیر واقعی و تخمین اولیه ($\alpha = 0.03$ ، $n = 3/1$) و مقدار بهینه شده را نشان می‌دهد. در این مورد بار فشار بدون خطا مورد استفاد قرار گرفته است.

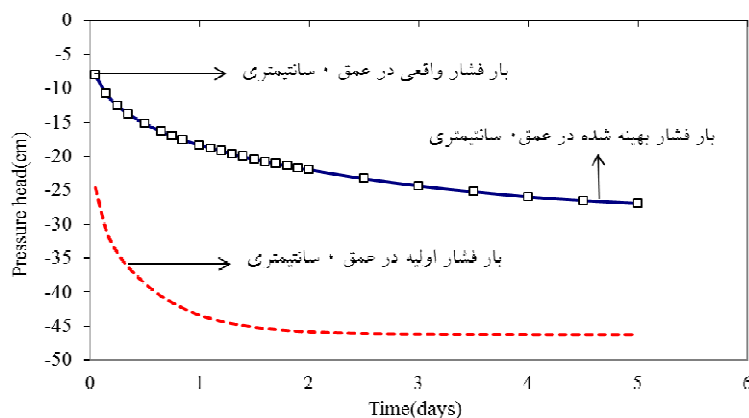
مقادیر واقعی با تخمین اولیه ($\alpha = 0.03$ ، $n = 3/1$) و مقدار بهینه شده توابع هدایت هیدرولیکی در شکل ۶ نمایش داده شده است. در این مورد نیز از داده‌های بار فشار بدون وارد کردن خطای تصادفی استفاده شده است. توابع هدف در دامنه α -n محاسبه شد و براساس این توابع هدف محاسبه شده نیز سطوح پاسخ در یک شبکه مستطیلی تهیه شد. شکل سطح پاسخ نشان‌دهنده مقدار تابع هدف برای ترکیبات مختلف از پارامترهای قابل تعدیل است.

نتایج بهینه‌سازی که در جدول ۱ ارائه شده است همگرایی مناسب و قابل قبول این روش حل را با مقدار واقعی پارامترها در صفحه α -n برابر (۱/۵، ۰/۰۸) نشان می‌دهد. در شکل ۷ می‌توان سطح پاسخ تابع هدف در فضای پارامترهای بهینه شده α و n برای سناریوی اول را مشاهده کرد.

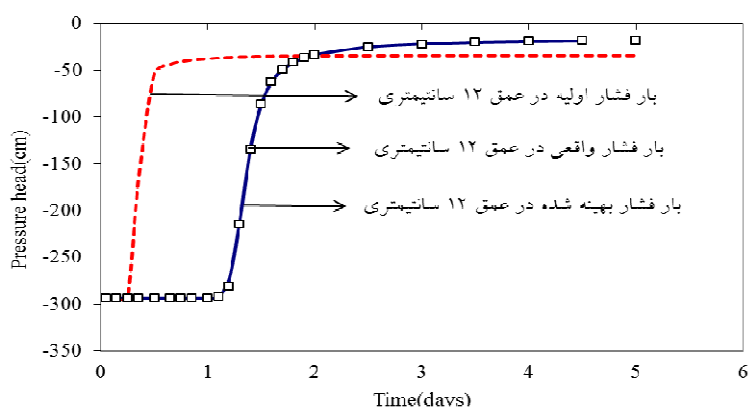
سطح پاسخ برای سناریوی اول که از داده‌های مشاهداتی بدون اضافه کردن خطا استفاده شده است به وضوح نشان می‌دهد که یک کاهش کلی در تابع هدف وجود دارد و این بیانگر وجود یگانگی در حل مساله مورد نظر بوده و آزمایش توزیع مجدد موفق می‌باشد.

(د) اثر خطای داده‌ها

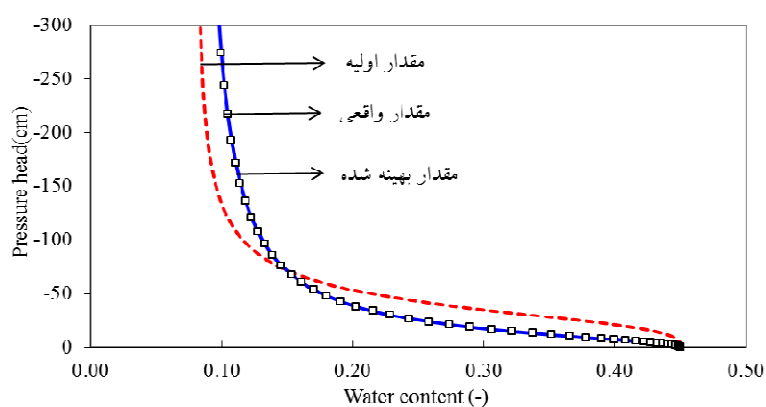
در این پژوهش هم‌چنین به بررسی اثر خطای داده‌ها بر دقت تخمین و شناسایی پارامترها مورد ارزیابی پرداخته شد و فرض شد که در این مورد از یک مدل دقیق استفاده شده است ولی داده‌های ورودی دارای خطای تصادفی با توزیع نرمال هستند. خطای داده را می‌توان با ($N(0, \alpha)$) نمایش داد که این خطاها به مقادیر به دست آمده با استفاده از روش حل پیشرو اضافه شد.



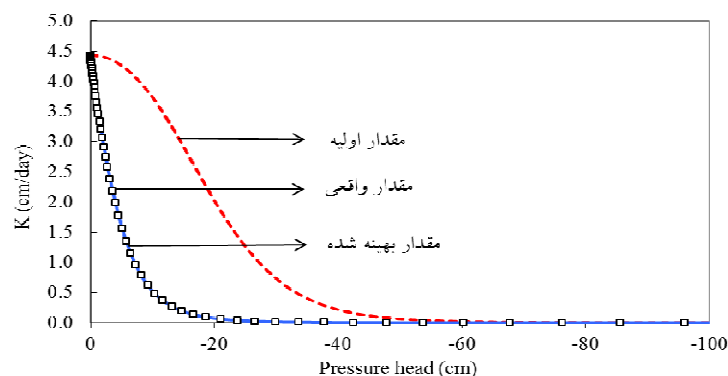
شکل ۳. مقایسه مشاهدات ساختگی (واقعی)، تخمینی اولیه (حدسی) و بهینه شده در سطح بالایی نمونه ۱ (داده‌های بار فشار در عمق صفر سانتی متری)



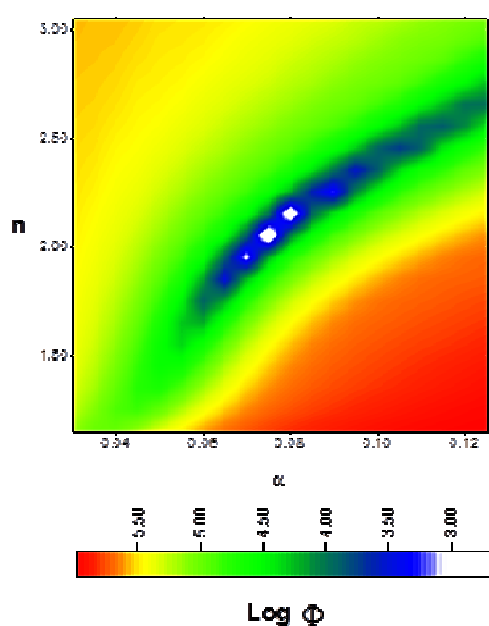
شکل ۴. مقایسه مشاهدات ساختگی (واقعی)، تخمینی اولیه (حدسی) و بهینه شده در سطح زیرین نمونه ۲ (داده‌های بار فشار در عمق ۱۲ سانتی متری)



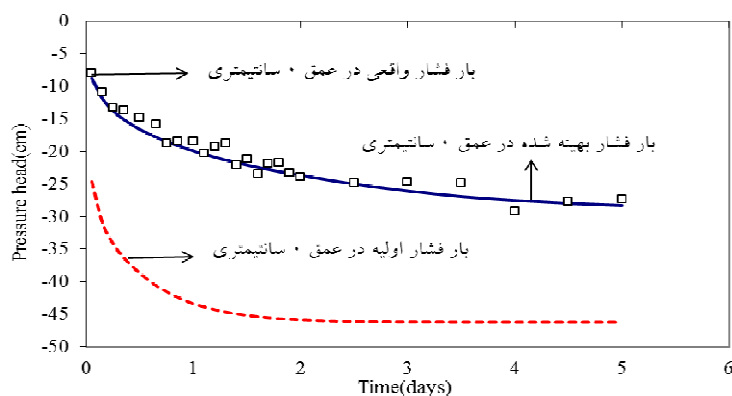
شکل ۵. تابع نگهداشت ساختگی (واقعی)، تخمینی اولیه (حدسی) و بهینه شده برای سناریو اول (تخمین اولیه $n=3/1$ ، $\alpha=0.3$)



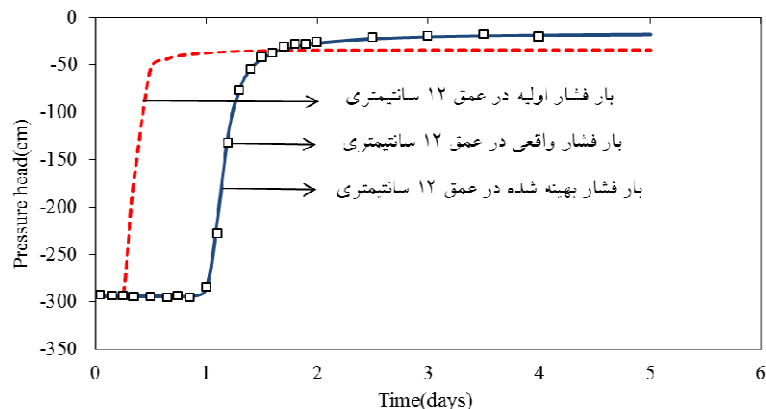
شکل ۶. تابع هدایت هیدرولیکی ساختگی (واقعی)، تخمینی اولیه (حدسی) و بهینه شده برای سناریو اول (تخمین اولیه $\alpha=0.3$ ، $n=3/1$)



شکل ۷. سطح پاسخ مربوط به تابع هدف در صفحه α - n (مشاهدات بار فشار بدون دخالت خطا می‌باشند)



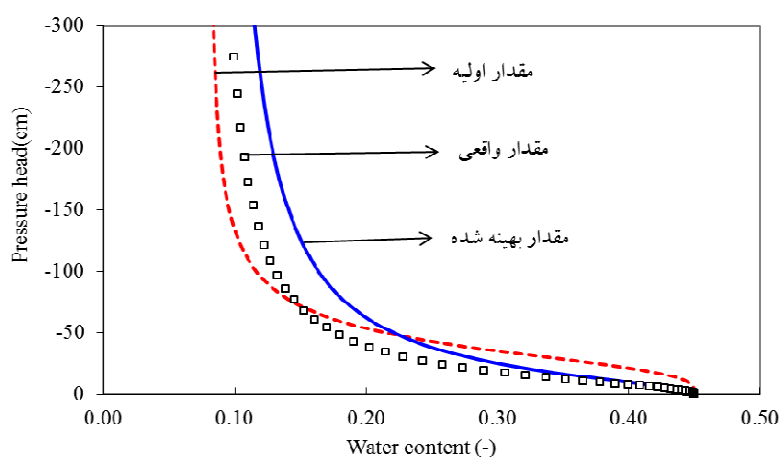
شکل ۸. مقایسه مشاهدات ساختگی (واقعی)، تخمینی اولیه (حدسی) و بهینه شده در سطح بالایی نمونه ۱ (داده‌های بار فشار در عمق صفر سانتی متری و دارای خطای تصادفی با توزیع نرمال می‌باشد)



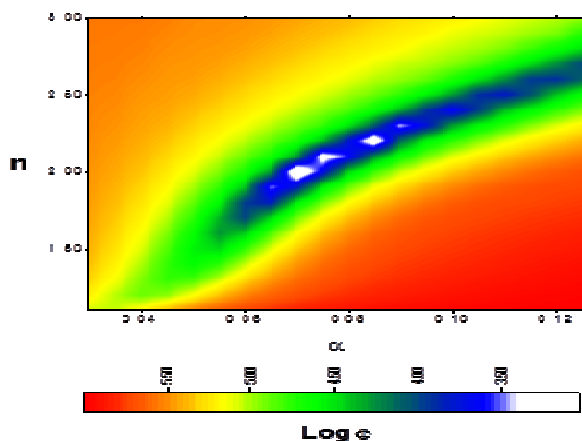
شکل ۹. مقایسه مشاهدات ساختگی (واقعی)، تخمینی اولیه (حدسی) و بهینه شده در سطح زیرین نمونه ۲ (داده‌های بار فشار در عمق ۱۲ سانتی‌متری و دارای خطای تصادفی با توزیع نرمال می‌باشد)

جدول ۲. نتایج تخمین پارامتر سناریو ۲ (خطای یک سانتی‌متری در داده‌های بار فشار وارد شد)

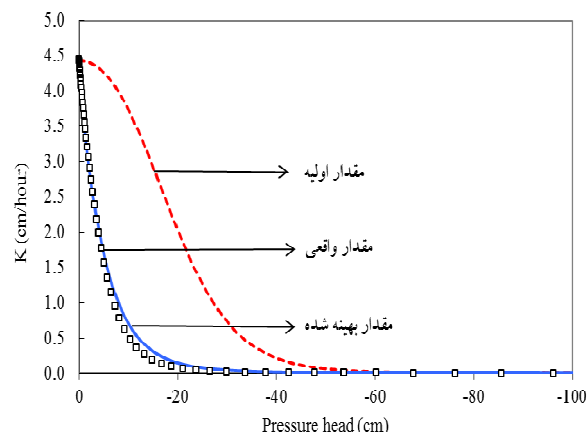
R ^۲	تابع هدف	مقدار بهینه		مقدار اولیه		اجرای برنامه
		n	α	n	α	
۰/۹۹۹۲۲۸۵	۱۹۷	۲/۰۲۱۵	۰/۰۷۲۲	۳/۱	۰/۰۳	۱
۰/۹۹۹۷۵۶۹	۶۹/۳	۲/۰۴۳۴	۰/۰۷۳۸	۱/۵	۰/۰۳	۲
۰/۹۹۹۸۷۱۵	۷۲/۱	۲/۰۵۹۵	۰/۰۷۴۸	۳/۱	۰/۱۳	۳
۰/۹۹۹۶۷۵۰۷	۴۰۰	۱/۸۰۳۷	۰/۰۶۲۶	۱/۵	۰/۱۳	۴



شکل ۱۰. منحنی نگهداشت ساختگی (واقعی)، تخمینی اولیه (حدسی) و بهینه شده برای سناریو اول (داده‌ها دارای خطای یک سانتی‌متری تصادفی می‌باشند)



شکل ۱۲. سطح پاسخ مربوط به تابع هدف در صفحه α - n
(مشاهدات بار فشار دارای خطای یک سانتی متری می‌باشد)



شکل ۱۱. تابع هدایت هیدرولیکی واقعی، تخمین اولیه (حدسی) و بهینه شده برای سناریو دوم (تخمین اولیه $\alpha=0.03$ ، $n=3/1$)

نتایج

افت محلی کوچک را اضافه بر افت کلی در سطح پاسخ مشاهده کرد. در حالت دوم با اضافه کردن خطا به داده‌ها مشاهداتی، تعداد افت‌های محلی در نزدیکی افت کلی افزایش یافت. با وجودی که اضافه کردن خطا در داده‌ها می‌تواند باعث ایجاد مشکلاتی در حل یگانه مساله به وجود آورد ولی در این مطالعه به منظور نزدیک شدن وضعیت آزمایش و داده‌های ثبت شده به شرایط واقعی از داده‌های بار فشار دارای خطا نیز استفاده شد و نتایج نیز نشان داد که تخمین پارامتر با استفاده از حل معکوس مبتنی بر داده‌های به دست آمده با آزمون توزیع مجدد می‌تواند مساله‌ای خوش وضع را پیش روی ما قرار داده که با حل آن به نتایجی با دقت بالا دست پیدا کنیم.

تعیین پارامترهای هیدرولیکی خاک با استفاده از داده‌های کشش سنجی بار فشار و با بهره‌گیری از روش حل معکوس می‌تواند نتایج قابل قبولی را در اختیار قرار دهد. دستیابی به نتایج قابل قبول در قالب سطوح پاسخ مورد ارزیابی قرار گرفت. مطالعه در دو سناریو دنبال شد که در سناریو اول داده‌های بار فشار بدون خطا مورد استفاده قرار گرفت و نتایج حاصل از اجرای برنامه و سطوح پاسخ مرتبط با آنها نیز تهیه گردید. در سناریو دوم داده‌های بار فشار با خطای تصادفی داری توزیع نرمال مورد استفاده قرار گرفت و بار دیگر فرآیند اجرای مدل، تخمین پارامترهای مورد نظر و نهایتاً ارزیابی نتایج با استفاده از سطوح پاسخ دنبال شد. در حالت اول می‌توان یک

منابع مورد استفاده

1. Bnoui, C. J. Sghaier, H. Sammouda and F. Lehmann. 2010. Parameter Estimation of Soil Hydraulic Functions for Unsaturated Porous Media Using an Inverse Problem and Multistep Outflow Experiment. J. Porous Media. Vol.8
2. Dobre, G. R. and R. Drobot. 2010. Estimating Soil Hydraulic Parameters Using a Metaheuristic Algorithm. Scientific Bulletin. Series, Mathematical Modeling in Civil Engineering, ISSN: 1841-5555.
3. Erdal, D., I. Neuweiler and J. A. Huisman. 2012. Estimating effective model parameters for heterogeneous unsaturated flow using error models for bias correction. Water Resour. Res., 48: W06530, doi:10.1029/2011WR011062
4. Jadoon, K., Z. S. Lambot, H. Verreken and E. Slob. 2009. Parameter Estimation for Unsaturated Soil Hydraulic Properties Using Full-waveform Hydrogeophysical Inversion of Time-lapse GPR Data. Society of Exploration Geophysicists.
5. Prasad, K., C. Ojha, P. Chandramouli and C. Madramootoo. 2010. Estimation of Unsaturated Hydraulic Parameters from Infiltration and Internal Drainage Experiments. J. Irrigation and Drainage Eng. 136(11): 766-773.
6. Raoof, M. and A. Pilpayeh. 2011. Estimating unsaturated soil hydraulic properties in sloping lands by numerical

- inversion. J. Food, Agri. & Environ. Vol.9 (3&4): 1067-1070.
7. Ritter, A. R. Munoz-Carpena, C. M. Regalado, M. Vanclooster and S. Lambot. 2004. Analysis of alternative measurement strategies for the inverse optimization of the hydraulic properties of a volcanic soil. J. Hydrol. 295:124–139
 8. Van Genuchten, M. Th. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J. 44, 892-898.
 9. Vogel, T., K. Huang, R. Zhang and M. Th. van Genuchten. 1996. The HYDRUS code for simulating one dimensional water flow, solute transport, and heat movement in variably-saturated media, version 5.0. Research Report 140, U.S. Salinity Laboratory, Riverside, California, 131. p.