

## شبیه‌سازی آب‌شستگی پشت دیواره‌های ساحلی به روش لاگرانژی با استفاده از مدل رئولوژی $\mu(I)$

احسان جعفری ندوشن<sup>۱</sup> و عطااله شیرزادی<sup>۲\*</sup>

(تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۶/۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۸/۷)

### چکیده

حرکت سریع و پیچیده رسوبات در محیط‌های رودخانه‌ای و ساحلی با جریان بسیار فرسایشی و گذرا مشکلات زیادی را برای مهندسان رودخانه در موضوع ژئومورفولوژی رودخانه‌های آبرفتی ایجاد می‌کند. پیش‌بینی دقیق این پیچیدگی‌ها در سیستم آب - رسوب (یک سیستم جریان دانه‌ای متراکم چند فازی) هنوز یک چالش عمده برای مدل‌های مبتنی بر شبکه است. با توجه به توانایی روش‌های لاگرانژی بدون شبکه در مدل‌سازی تغییر شکل‌های بزرگ و ناپیوستگی‌ها، روش‌های لاگرانژی بدون شبکه می‌توانند یک فرصت منحصربه‌فرد برای مقابله با چنین پیچیدگی فراهم کنند. پژوهش حاضر قابلیت‌های مدل نیمه‌ضمنی ذرات متحرک با تراکم ضعیف Weakly compressibility moving particle semi-implicit (WC-MPS) در مدل‌سازی برهم‌کنش خاک - سیال را توسعه می‌دهد تا امکان مدل‌سازی انتقال رسوب و اثرات آب‌شستگی را در پشت دیواره‌های ساحلی فراهم کند. در این روش مواد دانه‌ای به صورت یک سیال غیر نیوتنی و ویسکوپلاستیک در نظر گرفته شده است. برای پیش‌بینی رفتار غیر نیوتنی فاز دانه‌ای، از مدل رئولوژیکی  $\mu(I)$  استفاده شده است. به منظور تأیید کاربرد مدل حاضر در شبیه‌سازی برهم‌کنش فازهای مایع و جامد، ابتدا مسئله پرکاربرد شکست سد روی بستر فرسایش پذیر مدل‌سازی شد. متوسط خطای مدل مد نظر تقریباً ۶ درصد محاسبه شد که نشان‌دهنده کارایی و دقت مدل مد نظر در این مسئله است. در انتها، آب‌شستگی دیواره‌های ساحلی شبیه‌سازی شد. بررسی‌ها نشان داد که فرایندهای مرتبط با فرسایش و آب‌شستگی به خوبی توسط روش لاگرانژی حاضر قابل مدل‌سازی بوده و نتایج عددی با اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی مطابقت بسیار خوبی (با متوسط خطای مدل برابر با ۱۰ درصد) را نشان داد.

واژه‌های کلیدی: عمق آب‌شستگی، روش لاگرانژی، جریان دانه‌ای چند فازی غیر نیوتنی، انتقال رسوب، مهندسی رودخانه

۱. گروه مهندسی عمران، پردیس بیجار، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران.

۲. گروه مرتع و آبخیزداری، دانشکده منابع طبیعی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران.

\*: مسئول مکاتبات: پست الکترونیکی: a.shirzadi@uok.ac.ir

## مقدمه

امواج بزرگ و سیلاب‌ها می‌توانند سازه‌های مهندسی حفاظت و کناره‌های رودخانه از جمله سدها و دایک‌ها را فراگرفته و با شکست آن‌ها منجر به سیل‌های ناگهانی شوند (۲، ۳ و ۴). پیش‌بینی عمق آب‌شستگی به منظور جلوگیری از تخریب بستر رودخانه و حفظ پایداری سازه‌های کنترل جریان امری ضروری است. سازه‌های حفاظت سواحل (شمع‌ها، موج‌شکن‌ها و دیواره‌های ساحلی) معمولاً در معرض اثر ترکیبی جریان‌ها و امواج قرار می‌گیرند و در نتیجه فرایندهای آب‌شستگی پیچیده‌تری نسبت به سازه‌های مهندسی رودخانه‌ها ایجاد می‌کنند و پایداری آن‌ها را تهدید می‌کنند. جریان‌های مداوم موج سونامی شدید ممکن است باعث فرسایش طولانی‌مدت در قسمت پشتی سازه‌های حفاظتی ساحلی شود که اعتقاد بر این است که یکی از دلایل اصلی آسیب این نوع سازه‌ها است (۲۰، ۲۱، ۲۶ و ۲۸). برای تخمین کمی عمق نهایی حفره آب‌شستگی در پشت دیواره دریا به دلیل سرریز مداوم سونامی، ممکن است روابط تجربی بر اساس داده‌های آزمایش‌های فلولم ایجاد شود (۱). هاشمی و همکاران اثر زاویه انحراف گروه پایه نسبت به جهت جریان بر بیشینه عمق آب‌شستگی و توسعه زمانی آن پیرامون پایه‌های پل را به روش آزمایشگاهی بررسی کردند و دریافتند که بیشینه عمق آب‌شستگی گروه پایه در زاویه انحراف ۳۰ درجه به وقوع می‌پیوندد (۱۰). یئو و همکاران (۳۰) حتی فرمولی برای پیش‌بینی تغییرات زمانی عمق آب‌شستگی در پایین‌دست سرریزها پیشنهاد کردند. با این حال، برای آشکار کردن مکانیسم فرایند فرسایش زمانی، مدل ریاضی ممکن است مؤثرتر باشد؛ بنابراین درک پدیده آب‌شستگی و اثرهای آن بر محیط طبیعی و ساخته‌شده مستلزم ایجاد ابزارهای شبیه‌سازی عددی کافی است که قبل از استفاده برای پیش‌بینی مورد آزمایش و اعتبارسنجی قرار گرفته باشند. در این زمینه به‌طور سنتی مدل‌سازی عددی آب‌شستگی و انتقال رسوب با استفاده از روابط تجربی و یا نیمه‌تجربی صورت می‌گرفته است (۱۹). اثبات شده است که مدل‌های دو فاز که در آن فاز رسوبی به‌صورت یک فاز

جداگانه رفتار می‌کند، برای مدل‌سازی عددی انتقال رسوب مؤثر هستند. روش‌های عددی یا مبتنی بر شبکه (اویلری) هستند (مانند؛ مدل Finite Element Method (FEM) یا Finite Volume Method (FVM) که سیال و رسوب را به‌صورت پیوسته توصیف می‌کنند (۱۸)، یا لاگرانژی هستند (مانند؛ روش المان گسسته، Discrete Element Method (DEM) که مواد را به‌صورت گسسته در نظر می‌گیرند. روش‌های مبتنی بر شبکه با وجود موفقیت‌های مختلف، در جریان‌های سطح آزاد با هندسه پیچیده، و تغییر شکل‌های بزرگ گاهی با مشکلاتی روبرو هستند. همچنین برخی روش‌های اویلری در شبیه‌سازی جریان، با پخش یا نوسانات غیر فیزیکی ناشی از جمله جابه‌جایی در معادلات ناویر-استوکس همراه هستند. برای حل چالش‌های یادشده، روش‌های بدون شبکه در مدل‌سازی و حل مسائل شامل سطح آزاد و جریان‌های تک‌فاز و چندفازی توسعه پیدا کرده‌اند. هیدرودینامیک ذرات هموار Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) و روش نیمه‌ضمنی ذرات متحرک Moving Particle Semi-implicit (MPS) دو نوع از معروف‌ترین این روش‌ها هستند (۹، ۱۷ و ۲۵). روش MPS کاملاً لاگرانژی بوده که به سیال به دید مجموعه‌ای از ذرات می‌نگرد. مدل‌های برهم‌کنش ذرات برای عملگرهای دیفرانسیلی همچون گرادیان، دیورژانس و لاپلاسیان تعریف شده و معادلات حاکم به معادلات برهم‌کنش ذرات متحرک تبدیل می‌شوند. شکیبایی‌نیا و جین (۲۳) یک نسخه ضعیف تراکم‌پذیر از روش WC-MPS را برای بهبود کارایی و همچنین نوسانات عددی مرتبط با MPS اصلی پیشنهاد کردند. شکیبایی‌نیا و جین (۲۴) یک روش MPS چند فاز را برای سیستم‌های چند ویسکوزیته چند دانسیته پیشنهاد کردند. آن‌ها با ترکیب مدل MPS چند فاز خود با روابط رئولوژیکی مختلف، کاربرد مدل خود را به جریان‌های چند فاز جامد - مایع گسترش دادند. جعفری ندوشن و همکاران (۱۵) یک روش لاگرانژی بدون شبکه مبتنی بر فرمولاسیون نیمه‌ضمنی ذرات متحرک ضعیف تراکم‌پذیر توسعه دادند و آن را برای شبیه‌سازی جریان روی سرریزها بکار بردند. جعفری ندوشن و همکاران (۱۲) و

## مواد و روش‌ها

### معادلات حاکم

معادلات حاکم برای یک سیستم جریان چند فازی در یک قاب لاگرانژی شامل بقای جرم و تکانه و حرکت در مختصات لاگرانژی به شرح زیر است:

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g} \\ \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \mathbf{u} \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $t$  زمان،  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$  بردار موقعیت،  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u, v)$  بردار سرعت،  $\rho$  چگالی،  $\mathbf{g}$  شتاب جاذبه،  $p$  فشار و  $\boldsymbol{\tau}$  تنش برشی است. تانسور تنش به صورت معادله (۲) تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{E} + \xi (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \quad (2)$$

که در آن  $\mathbf{I}$  تانسور واحد،  $\eta$  ویسکوزیته مؤثر مواد (که توسط مدل رئولوژیکی ارائه شده است)،  $\xi$  دومین ضریب ویسکوزیته، و  $\mathbf{E}$  نرخ تانسور کرنش است. در این مطالعه جریان با تراکم‌پذیری ضعیف در نظر گرفته می‌شود و یک معادله حالت، فشار را با استفاده از میدان چگالی  $p = f(\rho)$  پیش‌بینی می‌کند.

### رئولوژی رسوب

برای محاسبه تانسور تنش، باید ویسکوزیته مؤثر  $\eta$  را محاسبه کرد. درحالی‌که ویسکوزیته مؤثر فاز آب به صورت ثابت (مستقل از زمان و تنش) است، فاز رسوب از طریق مدل رئولوژیکی تعیین می‌شود. در میان مدل‌ها و نظریه‌های رئولوژیکی توسعه‌یافته برای جریان‌های دانه‌ای و رسوبی، یک مدل اصطکاکی مبتنی بر قانون  $\mu(\mathbf{I})$  به‌تازگی توجه گسترده‌ای را به خود جلب کرده است. مدل رئولوژیکی  $\mu(\mathbf{I})$  از تجزیه و تحلیل تعداد زیادی از داده‌های آزمایشگاهی و عددی مشتق شده است که یک چارچوب کلی برای توصیف طیف گسترده‌ای از رفتار مواد دانه‌ای ارائه می‌دهد. مدل  $\mu(\mathbf{I})$  یک مدل ویسکوپلاستیک است که در آن ماده برای تنش‌های کمتر از

تاج‌نمایی و همکاران (۲۷) یک مدل WC-MPS چند فازی را برای جریان‌های رسوب‌محور توسعه دادند و به‌طور کامل رفتار رسوب را توصیف کردند. جعفری ندوشن و شکیبایی‌نیا (۱۴) از مدل چند فازی بدون شبکه برای مدل‌سازی آب‌شستگی موضعی با رئولوژی  $\mu(\mathbf{I})$  استفاده کردند. وانگ و همکاران (۲۹) آب‌شستگی پشت دیواره ساحل به‌دلیل سرریز آب ناشی از سونامی در چارچوب روش Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics (ISPH) را شبیه‌سازی کردند. گالانو و همکاران (۸) روش المان محدود ذرات (PFEM) Particle Finite Element Method را برای مدل‌سازی انتقال رسوب و اثرات آب‌شستگی توسعه دادند. همچنین جعفری ندوشن (۱۱) به مدل‌سازی جریان دانه‌ای در سیلو به روش نیمه‌ضمنی ذرات متحرک با تراکم ضعیف (WCMPM) با مدل رئولوژیکی هرشل بالکی نمایی پرداخت و نشان داد که این مدل به‌خوبی می‌تواند حرکت جریان دانه داخل سیلو را شبیه‌سازی کند. درحالی‌که مدل‌های کلی ویسکو - پلاستیک مانند بینگهام - پلاستیک و هرشل - بولکلی دو مدل پرکاربرد در مطالعات گذشته بوده‌اند، توجه جدیدتر به مدل رئولوژیکی  $\mu(\mathbf{I})$  معطوف شده است. جوپ و همکاران (۱۶) در این مدل، خواص رئولوژیکی به‌طور واضح با خواص فیزیکی مواد دانه‌ای (به‌عنوان مثال، اندازه و چگالی دانه) مرتبط است و رژیم‌های جریان دانه‌ای (رژیم‌های شبه استاتیک، اینرسی و ویسکوز) در نظر گرفته می‌شوند. علاوه بر این، تاج‌نمایی و همکاران (۲۷) نشان داد که مدل  $\mu(\mathbf{I})$  نتایج کمی دقیق‌تر از مدل هرشل - بالکلی تولید می‌کند. به‌تازگی جعفری و همکاران (۱۳) یک مدل عددی مبتنی بر ذرات را بر اساس روش MPS با تراکم ضعیف (WC-MPS) برای شبیه‌سازی زمین لغزش‌های نیمه‌غوطه‌ور دو بعدی و سه بعدی با استفاده از رئولوژی  $\mu(\mathbf{I})$  توسعه دادند. با توجه به اهمیت آب‌شستگی دیواره‌های ساحلی و همچنین کارایی مدل رئولوژی  $\mu(\mathbf{I})$  در شبیه‌سازی و رفتار مواد دانه‌ای و رسوب، در این پژوهش به بررسی آب‌شستگی دیواره‌های ساحلی به روش WC-MPS با استفاده از مدل رئولوژی  $\mu(\mathbf{I})$  پرداخته شده است.

ویسکو - پلاستیک تعمیم یافته مانند هرشل - بالکلی و بینگهام است (به شکلیایی نیا و جین (۲۳) و تاج نسایی و همکاران (۲۷) مراجعه کنید). با وجود این، رئولوژی پس از شکست را به یک اصطلاح قابل تأیید مرتبط می کند که نه تنها به عملکرد صریح خواص مواد، بلکه به فشار و نرخ کرنش نیز مربوط می شود. معادله (۶) مفرد است و زمانی که نرخ کرنش به صفر می رسد ( $E \rightarrow 0$ )، متوقف می شود؛ بنابراین نمی توان آن را به طور مستقیم در مدل عددی استفاده کرد. برای جلوگیری از این موضوع باید از یک فرم پیوسته منظم استفاده شود که در این مطالعه از یک منظم سازی نمایی پرکاربرد که توسط پاپاناستاسیو (۲۲) به معادله پیشنهاد شده است، استفاده شده است. مطابق معادله (۷):

$$\eta = \frac{\mu_1 p_s (1 - \exp(-m \|E\|))}{2 \|E\|} + \frac{(\mu_2 - \mu_1) d_s \sqrt{\rho_f c_d}}{I_0 + \|E\| d_s / \sqrt{p_s / (\rho_f c_d)}} \frac{\sqrt{p_s}}{2} \quad (7)$$

که در آن  $m$  یک توان است که رشد ویسکوزیته را کنترل می کند. این معادله برای تنش های کوچکتر و بزرگتر از تنش تسلیم معتبر است و پیوسته است؛ زیرا برای  $E \rightarrow 0$  ویسکوزیته مؤثر به مقدار بیشینه  $0.5(m\mu_1 p_s + (\mu_2 - \mu_1) d_s \sqrt{\rho_f c_d p_s} / I_0)$  می رود.

### روش عددی

روش عددی بدون مش این مطالعه بر اساس فرمول ذرات متحرک نیمه ضمنی (MPS) است. در MPS، حوزه محاسباتی با مجموعه ای از گره های محاسباتی آزاد به حرکت که ذرات نامیده می شوند، نمایش داده می شود و گسسته می شود (شکل ۱). متغیر میدان به هر ذره اختصاص داده می شود. درون یابی مقادیر و ادغام مشتقات فضایی روی هر ذره از طریق یک فرایند میانگین وزنی بین ذره هدف و همسایه اش در شعاع نفوذ انجام می شود. تابع وزن (تابع هسته)،  $W(\mathbf{r}_{ij}, r_e)$ ، اثر یک ذره همسایه  $j$  با بردار موقعیت  $\mathbf{r}_{ij}$  را روی ذره هدف  $i$  با بردار

تنش تسلیم،  $\tau_y$  مانند جسم صلب رفتار می کند و برای تنش های بزرگتر از  $\tau_y$  به عنوان سیال چسبناک جریان می یابد. این مدل ویسکوزیته مؤثر را به صورت معادله (۳) تعریف می کند.

$$\eta = \begin{cases} \frac{\mu(I) p_s}{2 \|E\|} & \text{if } \|\tau\| > \tau_y \\ \infty & \text{if } \|\tau\| < \tau_y \end{cases} \quad (3)$$

که در آن  $\mu(I)$  ضریب اصطکاک وابسته به اینرسی است و  $p_s$  فشار مکانیکی (تنش نرمال) بین دانه های رسوب است. در اینجا تنش تسلیم،  $\tau_y$  از معیار تسلیم دراکر - پراگر محاسبه می شود (۳) که برای مواد بدون چسبندگی به صورت  $\tau_y = \mu_1 p_s$  محاسبه می شود؛ به طوری که  $\mu_1$  نشان دهنده اولین ضریب اصطکاک است. ضریب اصطکاک  $\mu(I)$  به عددی بدون بعد  $I$  بستگی دارد که عدد اینرسی نامیده می شود که به عنوان نسبت بین مقیاس های زمانی میکروسکوپی و ماکروسکوپی تعریف می شود و به رژیم های جریان دانه ای بستگی دارد. ضریب اصطکاک توسط جوپ و همکاران (۱۶) به صورت معادله (۴) نشان داده شده است.

$$\mu(I) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{I_0 / I + 1} \quad (4)$$

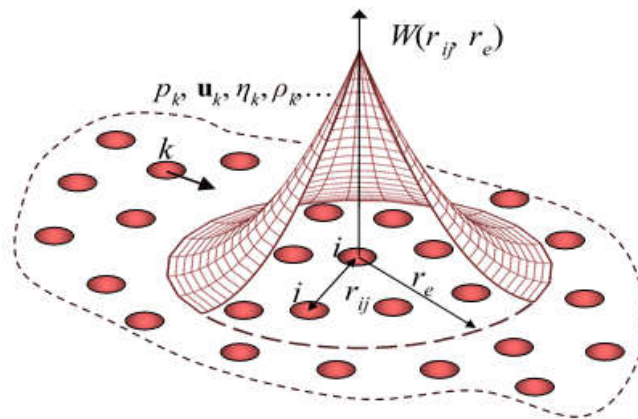
به طوری که  $\mu_2$  ضریب اصطکاک دوم،  $\mu_1$  و  $\mu_2$  نشان دهنده حد بالا و پایین  $\mu(I)$  و  $I_0$  یک عدد اینرسی مرجع است (ضریب ثابتی است که معمولاً از طریق آزمایش تعیین می شود). برای یک جریان دانه ای غوطه ور با سیال محیطی با ویسکوزیته کم، عدد اینرسی توسط فورتر و پولیکون (۶) به صورت معادله (۵) ارائه شده است:

$$I = \frac{\|E\| d_s}{\sqrt{p_s / (\rho_f c_d)}} \quad (5)$$

که در آن  $d_s$  اندازه دانه رسوب و  $C_d$  ضریب درگ است و  $\rho_f$  و  $\eta_f$  به ترتیب چگالی و ویسکوزیته سیال محیطی هستند؛ بنابراین ویسکوزیته مؤثر را می توان به صورت معادله (۶) محاسبه کرد:

$$\eta = \frac{\mu_1 p_s}{2 \|E\|} + \frac{(\mu_2 - \mu_1) d_s \sqrt{\rho_f c_d}}{I_0 + \|E\| d_s / \sqrt{p_s / (\rho_f c_d)}} \frac{\sqrt{p_s}}{2} \quad (6)$$

این معادله بسیار شبیه به روابط رئولوژیکی



شکل ۱. شماتیک از تقریب عددی MPS

که در آن،  $n_0$  چگالی شماره ذره اولیه و  $\lambda$  ضریبی است که به صورت معادله (۱۵) تعریف می‌شود:

$$\lambda = \frac{\int W(r, r_e) r^2 dv}{\int_v W(r, r_e) dv} \approx \frac{\sum_{j \neq i} r_{ij}^2 W(r_{ij}, r_e)}{\sum_{j \neq i} W(r_{ij}, r_e)} \approx \langle r_{ij}^2 \rangle \quad (15)$$

### گرادیان فشار

روش محاسبه فشار این مطالعه بر اساس روش MPS ضعیف تراکم‌پذیر (WC-MPS) است (۲۳) که فرض می‌کند سیال کمی تراکم‌پذیر است و از یک معادله حالت صریح برای محاسبه فشار از میدان چگالی استفاده می‌کند. معادله حالت تایت شکیبایی نیا و جین (۲۳) به صورت معادله (۱۶) استفاده می‌شود:

$$p_i = \frac{\rho c_0^2}{7} \left( \left( \frac{\langle n \rangle_i}{n_0} \right)^7 - 1 \right) \quad (16)$$

که در آن،  $c_0$  یک سرعت صوتی مصنوعی (عددی) است که برای نگاه‌داشتن تراکم‌پذیری (تغییر چگالی) کمتر از مقدار قابل قبول (معمولاً کمتر از ۱ درصد) انتخاب شده است. سپس گرادیان فشار با استفاده از فرمول اصلاح‌شده گرادیان MPS به صورت تقریبی تخمین زده می‌شود:

$$\langle \nabla p \rangle_i = \frac{D}{n_0} \sum_{i \neq j} \left( \frac{p_j - \hat{p}_i}{r_{ij}} \frac{r_j - r_i}{r_{ij}} W(r_{ij}, r_e) \right); \quad (17)$$

where  $\hat{p}_i = \min(p_i, p_j)$ ;  $J \in \{r_{ij} \leq r_e\}$

موقعیت تعیین می‌کند که در آن  $r_{ij} = |r_j - r_i|$  فاصله بین دو ذره است. این مطالعه از تابع هسته چندجمله‌ای مرتبه ۳ استفاده می‌کند که توسط شکیبایی نیا و جین (۲۳) پیشنهاد شده است:

$$W(r_{ij}, r_e) = \begin{cases} (1 - r_{ij}/r_e)^3 & 0 \leq (r_{ij}/r_e) < 1 \\ 0 & (r_{ij}/r_e) \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

پارامتر بدون بعد چگالی عددی ذرات ( $n$ ) برای نشان دادن تراکم ذرات بکار گرفته می‌شود که به صورت معادله (۹) استفاده می‌شود:

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} W(r_{ij}, r_e) \quad (9)$$

در این معادله،  $\langle - \rangle$  عملگر میانگین وزن است. تقریب MPS مشتقات فضایی (درون‌یابی، گرادیان، واگرایی و لاپلاسین) برای مقیاس‌کننده دلخواه  $f$  و بردار  $f$  روی ذره هدف  $i$  توسط شکیبایی نیا و جین (۲۳) ارائه شده است:

$$\langle f \rangle_i = \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} (f_j W(r_{ij}, r_e)) \quad (10)$$

$$\langle f \rangle_i = \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} (f_j W(r_{ij}, r_e)) \quad (11)$$

$$\langle \nabla f \rangle_i = \frac{D}{n_0} \sum_{i \neq j} \left( \frac{f_j - f_i}{r_{ij}} \frac{r_j - r_i}{r_{ij}} W(r_{ij}, r_e) \right) \quad (12)$$

$$\langle \nabla \cdot f \rangle_i = \frac{D}{n_0} \sum_{i \neq j} \left( \frac{f_j - f_i}{r_{ij}} \cdot \frac{r_j - r_i}{r_{ij}} W(r_{ij}, r_e) \right) \quad (13)$$

$$\langle \nabla^2 f \rangle_i = \frac{2D}{\lambda n_0} \sum_{i \neq j} ((f_j - f_i) W(r_{ij}, r_e)) \quad (14)$$

## شرایط مرزی

### سطح آزاد

فشار سطح آزاد به مرزهای سطح آزاد اختصاص داده می‌شود. برای تعیین مکان ذرات سطح آزاد از مقدار چگالی عدد ذرات استفاده می‌شود. تعداد ذرات درحالی‌که به سطح آزاد نزدیک می‌شود، کاهش می‌یابد. این به‌عنوان معیاری برای تشخیص ذرات سطح آزاد استفاده می‌شود. یک ذره به‌عنوان یک ذره سطح آزاد تعیین می‌شود که چگالی عدد ذره آن کمتر از  $\beta$  برابر چگالی متوسط تعداد ذرات اولیه باشد. در این مقاله مقدار  $\beta$ ، ۰/۹۴ در نظر گرفته شده است که توسط شکیبایی‌نیا و جین (۲۳) توصیه شده است (شکل ۲).

### مرزهای صلب

برای مرزهای صلب (تخت و دیوارها)، چندلایه از ذرات به‌اصطلاح مجازی در خارج از مرز در نظر گرفته می‌شوند تا مقادیر مرزی را تعیین کنند و از کمبود چگالی ناخواسته در نزدیکی مرز جلوگیری کنند. فشار ذرات مجازی از داخل حوزه محاسباتی برون‌یابی می‌شود (برای اطمینان از نیروی دافعه مرزی). برای ذرات درون لایه مرزی، از پروفیل سرعت لگاریتمی استفاده می‌شود (شکل ۳). جزئیات در مورد شرایط مرزی را می‌توان در مطالعه جعفری ندوشن و همکاران (۱۵) یافت.

### مرزهای باز

روش این مطالعه برای اجرای مرزهای باز (مرزهای ورودی و خروجی) بر اساس نسخه اصلاح‌شده جعفری و همکاران (۱۴) است. برای شرط مرزی با سرعت معلوم جریان ورودی، تعدادی ذره با توجه به مشخصات سرعت مرز ورودی به جریان ورودی افزوده می‌شود. به بیان دیگر، بسته به توزیع سرعت جریان ورودی در عمق، در هر چند گام زمانی طبق معادله (۱۸)، یک ذره در همان عمق به جریان ورودی اضافه می‌شود (۱۵).

$$k(y) = \frac{\Delta t}{u(y)\Delta t} \quad (18)$$

که در آن  $k$  مقاطع زمانی افزودن ذرات محاسباتی،  $u(y)$  سرعت

جریان ورودی در عمق،  $\Delta t$  گام زمانی و  $\Delta l$  فاصله اولیه بین ذرات است. برای شرط مرزی با فشار یا عمق معلوم جریان خروجی، ذراتی که در مجاورت ذرات مجازی مرز خروجی قرار می‌گیرند، حذف شده و به ذرات ذخیره می‌پیوندند؛ به‌نحوی که عمق ذرات مجازی مرز برابر شرط مرزی عمق خروجی خواهد بود (شکل ۴).

### روش حل

ادغام زمان و روش حل بر اساس یک الگوریتم تصحیح پیش‌بینی است که در آن هر مرحله زمانی به دو مرحله فرعی پیش‌بینی و تصحیح تقسیم می‌شود. سرعت در یک مرحله زمانی جدید ( $t+1$ ) از مجموع سرعت پیش‌بینی شده ( $u^*$ ) و سرعت تصحیح‌شده ( $u'$ ) محاسبه می‌شود:

$$u_i^{k+1} = u_i^* + u_i' \quad (19)$$

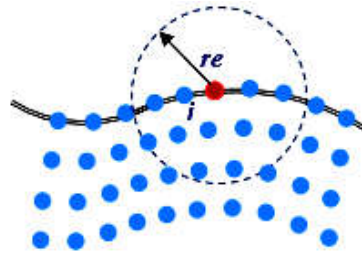
$$u_i^* = u_i^k + \frac{\Delta t}{\rho_i} (g + \eta_{ij} \nabla^2 u_i^k - (1 - \alpha) \nabla p_i^k) \quad (20)$$

$$u_i' = -\frac{\alpha \Delta t}{\rho_i} \nabla p_i^{k+1}$$

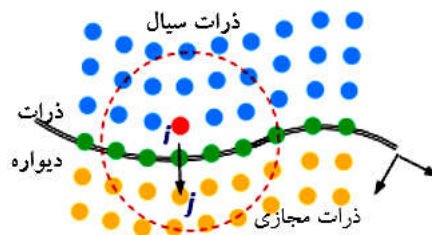
ضریب آرامش  $\alpha$  بین ۰ و ۱ انتخاب می‌شود که در اینجا مقدار ۰/۵ در نظر گرفته شد. این ضریب در هر مرحله زمانی از مدل رئولوژیکی برای محاسبه ویسکوزیته مؤثر و سپس برای پیش‌بینی سرعت استفاده می‌شود. برای محاسبه اثر جریان رینولدز زیاد، به‌ویژه در فاز آب، یک مدل آشفتگی برای محاسبه ویسکوزیته گردابی اعمال می‌شود که سپس به ویسکوزیته مؤثر اضافه می‌شود. در اینجا یک مدل (SPS) شبیه‌سازی گردابی بزرگ (LES) استفاده شده است. برای دسترسی به جزئیات مفهوم مدل MPS، مطالعه شکیبایی‌نیا و جین (۲۲) پیشنهاد می‌شود. این مدل به این دلیل استفاده شده است که برای روش‌های ذرات به‌خوبی آزمایش شده است. اندازه گام زمانی باید شرایط پایداری Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) و همچنین پایداری معادله انتشار را برآورده کند (۵):

$$\Delta t \leq \min \left\{ C \frac{d_p}{c_0 + |U|_{\max}}, \frac{\rho d_p^2}{2D\eta_{\max}} \right\} \quad (21)$$

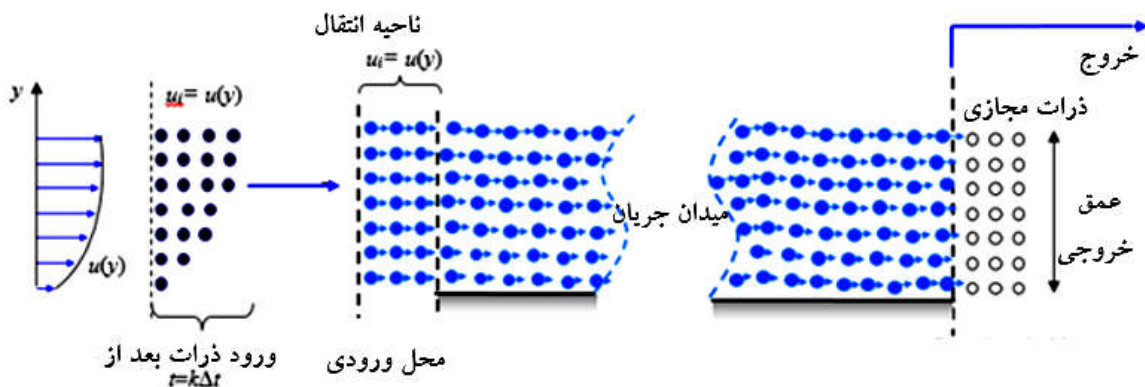
که در آن  $d_p$  فاصله بین ذرات (اندازه ذرات)،  $C$  عدد کورانت و  $\eta_{\max}$  ویسکوزیته بیشینه است.



شکل ۲. ذرات روی سطح آزاد



شکل ۳. ذرات روی مرز جامد و ذرات مجازی



شکل ۴. روش اجرای مرز باز برای مرز خروجی و ورودی

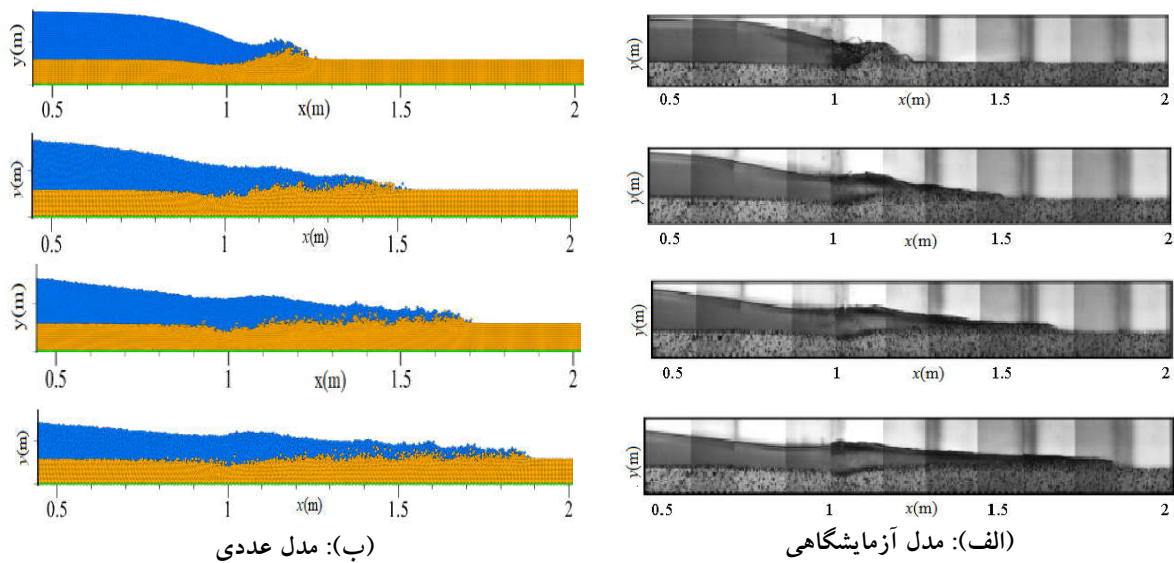
## نتایج و بحث

### اعتبارسنجی و مدل‌سازی عددی

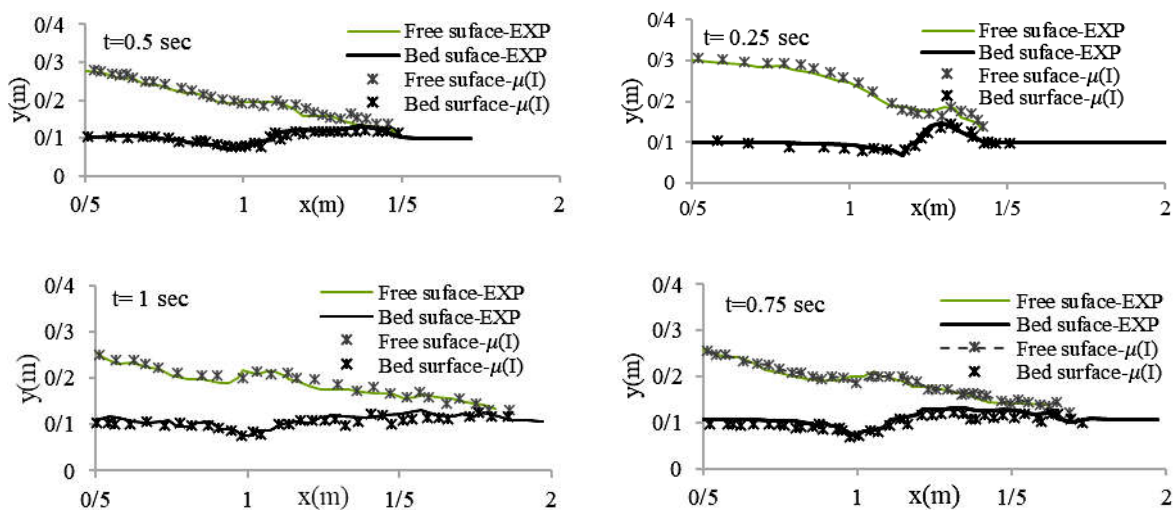
به منظور تأیید کاربرد مدل حاضر در شبیه‌سازی برهم‌کنش فازهای مایع و جامد، ابتدا مسئله پرکاربرد شکست سد روی بستر فرسایش‌پذیر که سبب انتقال رسوب پشت مخزن سد و تغییرات سریع بستر می‌شود، بررسی شد. بدین منظور مدل فیزیکی فراکارلو و کاپارت (۷) با استفاده از مدل پیشنهادی مورد شبیه‌سازی و تحلیل قرار گرفت. گلوله‌های PVC با قطر ۰/۰۳۵ متر با ضخامت ۵ سانتی‌متر به صورت افقی در بالادست و پایین دست سد قرار گرفته است. عمق اولیه آب بالادست ۱۰ سانتی‌متر تنظیم شده است. چگالی اولیه ذرات عددی برای

گلوله‌های PVC، ۱۵۴۰ کیلوگرم بر مترمکعب در نظر گرفته شد. شکل ۵ مقایسه نتایج شبیه‌سازی شده با استفاده از مدل حاضر با عکس‌های آزمایشگاهی را نشان می‌دهد.

گراف‌های شکل ۶ نتایج کمی‌سازی سطح بستر رسوب و آب در چهار زمان مشخص ۰/۲۵، ۰/۵، ۰/۷۵ و ۱ ثانیه برای هر سه حالت آزمایشگاهی و مدل عددی نشان می‌دهد. همان‌گونه که نتایج نشان می‌دهد، پروفیل سطح آزاد، موقعیت پیشانی موج، آب‌شستگی بستر و ضخامت ته‌نشینی رسوب در روش  $\mu(I)$  با دقت زیادی توسط مدل شبیه‌سازی شده است. برای محاسبه مقدار خطای مدل عددی WC-MPS و مقایسه آن با نتایج تجربی، از خطای ریشه مربع نرمال (NRMSE)



شکل ۵. مقایسه نتایج کیفی سطح آزاد و موقعیت سطح رسوب در مدل عددی و آزمایشگاهی



شکل ۶. مقایسه نتایج کمی سطح آزاد و موقعیت سطح رسوب در مدل عددی و آزمایشگاهی

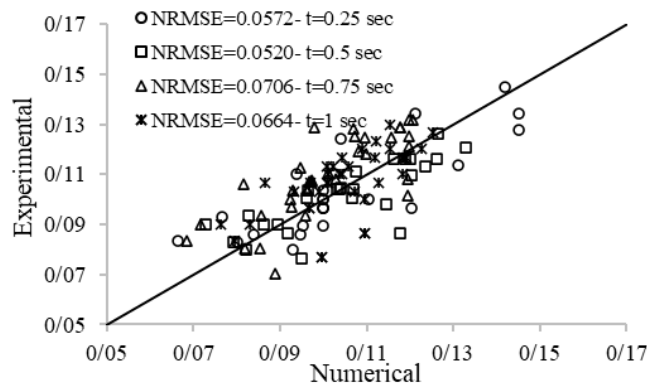
در این معادله،  $X_n$  مقادیر اندازه‌گیری شده،  $X_p$  مقادیر پیش‌بینی شده،  $N$  تعداد داده‌ها و  $\bar{X}$  میانگین داده‌های اندازه‌گیری شده است. مقدار این خطا در زمان‌های ۰/۲۵، ۰/۵، ۰/۷۵ و ۱ ثانیه محاسبه شده است و نمودار پراکندگی پروفیل سطح در شکل ۷ نشان داده شده است. در مجموع متوسط خطای NRMSE برای چهار زمان مد نظر به ترتیب ۵/۷، ۵/۲، ۷ و ۶/۶ درصد است که این نشان‌دهنده کارایی و دقت مدل مد نظر در این مسئله است.

مطابق معادله (۲۲) استفاده شده است. این معیار برای مقایسه مدل‌های مختلف مناسب خواهد بود. گفتنی است که NRMSE کمتر از ۱۰ درصد نشان‌دهنده دقت مدل، ۲۰-۱۰ درصد مناسب بودن مدل، ۳۰-۲۰ درصد دقت متوسط و بیش از ۳۰ درصد نشان‌دهنده ضعف مدل است.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_n - X_p)^2} \quad (22)$$

$$NRMSE = \frac{RMSE}{\bar{X}}$$





شکل ۷. نمودار پراکندگی پروفیل سطح رسوب مدل عددی و آزمایشگاهی در زمان‌های ۰/۲۵، ۰/۵، ۰/۷۵ و ۱ ثانیه

حجم و زمان محاسبه‌های می‌شود و در دقت نتایج تأثیر محسوسی ندارد؛ بنابراین مقرون‌به‌صرفه نبوده و برعکس افزایش قطر ذرات باعث کاهش دقت مدل می‌شود. انتخاب قطر بهینه نیاز به سعی و خطا دارد. در این مطالعه قطر بهینه ۰/۰۰۱ متر برای ذرات در نظر گرفته شده است؛ از این رو مدل مد نظر دارای ۲۳۵۵۹ ذره به قطر ۰/۰۰۱ متر است.

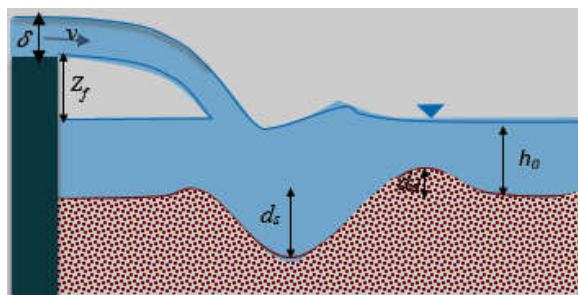
شکل ۱۰ یک نمونه عکس فوری از ویسکوزیته شبیه‌سازی شده، بزرگی سرعت، بردار سرعت و کسر حجمی در زمان ۵ ثانیه را ارائه می‌کند. الگوی گردش جریان نیز در این شکل برجسته شده است. هنگامی که جریان جت به سطح رسوب برخورد می‌کند، به دو شاخه تقسیم می‌شود: (۱) جریان قوی در خلاف جهت عقربه‌های ساعت و (۲) جریان ضعیف به سمت عقب (در جهت عقربه‌های ساعت) در خلاف جهت جریان رسوب جت. این جریان‌ها مواد رسوبی را فرسایش می‌دهند و یک حفره آب‌شستگی ایجاد می‌کنند و با گذشت زمان، سوراخ آب‌شستگی بزرگ می‌شود. در جاهایی که تنش برشی ناشی از این جریان‌ها از تنش تسلیم بیشتر می‌شود (یعنی مناطق با ویسکوزیته کم)، مواد رسوبی شروع به حرکت کرده و از بستر جدا می‌شوند. این ماده توسط جریان حمل می‌شود و در پایین دست تحت وزن آن‌ها رسوب می‌کند.

شکل ۱۱ مقایسه کمی پروفیل‌های آب‌شستگی تجربی و عددی را ارائه می‌دهد. با توجه به شکل ۱۰، مدل عددی پیشنهادی توانسته است شکل و اندازه سوراخ آب‌شستگی را با موفقیت شبیه‌سازی کند.

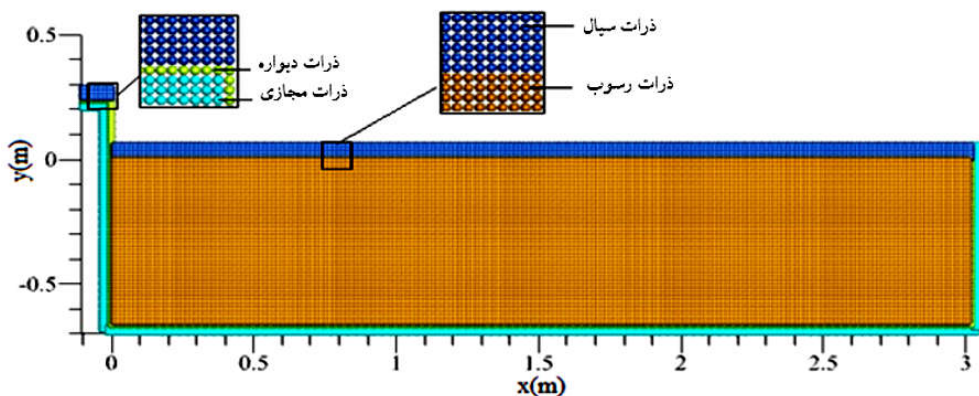
### شبیه‌سازی آب‌شستگی پشت دیواره‌های ساحلی

باتوجه به اهمیت آب‌شستگی دیواره‌های ساحلی ناشی از امواج، در این بخش با استفاده از روش عددی WCMPS و مدل رئولوژیکی  $\mu(I)$  به بررسی پدیده آب‌شستگی پرداخته شده است؛ بنابراین از داده‌های آریکاوا و همکاران (۱) برای مدل‌سازی فرایند آب‌شستگی استفاده شده است. این آزمایش در یک فلوم به طول ۱۰۵ متر و عرض ۰/۸ متر انجام شد. بستر متحرک از شن و ماسه با اندازه دانه ۰/۲۱ میلی‌متر ساخته شده بود و در پشت دیواره پخش شده است. پارامترهای مؤثر بر آب‌شستگی موضعی در پشت دیواره به صورت زیر است؛ به طوری که ارتفاع از سطح بستر متحرک تا بالای دیوار عمودی ( $Z_f$ ) ۲۴ سانتی‌متر، عمق سرریز در بالای دیوار عمودی ( $\delta$ ) ۵ سانتی‌متر، دبی جریان ( $q$ ) پنجاه هزارم مترمکعب بر ثانیه، سرعت جریان در بالای دیوار عمودی ( $v$ ) یک متر بر ثانیه، ارتفاع اولیه آب ( $h_0$ ) پنج و نیم سانتی‌متر و  $ds$  بیشترین عمق آب‌شستگی است. شماتیک از مجموعه آزمایشی در شکل ۸ نشان داده شده است. چگالی سیال ۱۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و ویسکوزیته سینماتیکی سیال  $10^{-6}$  مترمربع بر ثانیه تنظیم شدند. ماده قابل فرسایش مورد استفاده، ماسه با چگالی ۲۶۵۰ کیلوگرم بر مترمکعب در نظر گرفته شد.

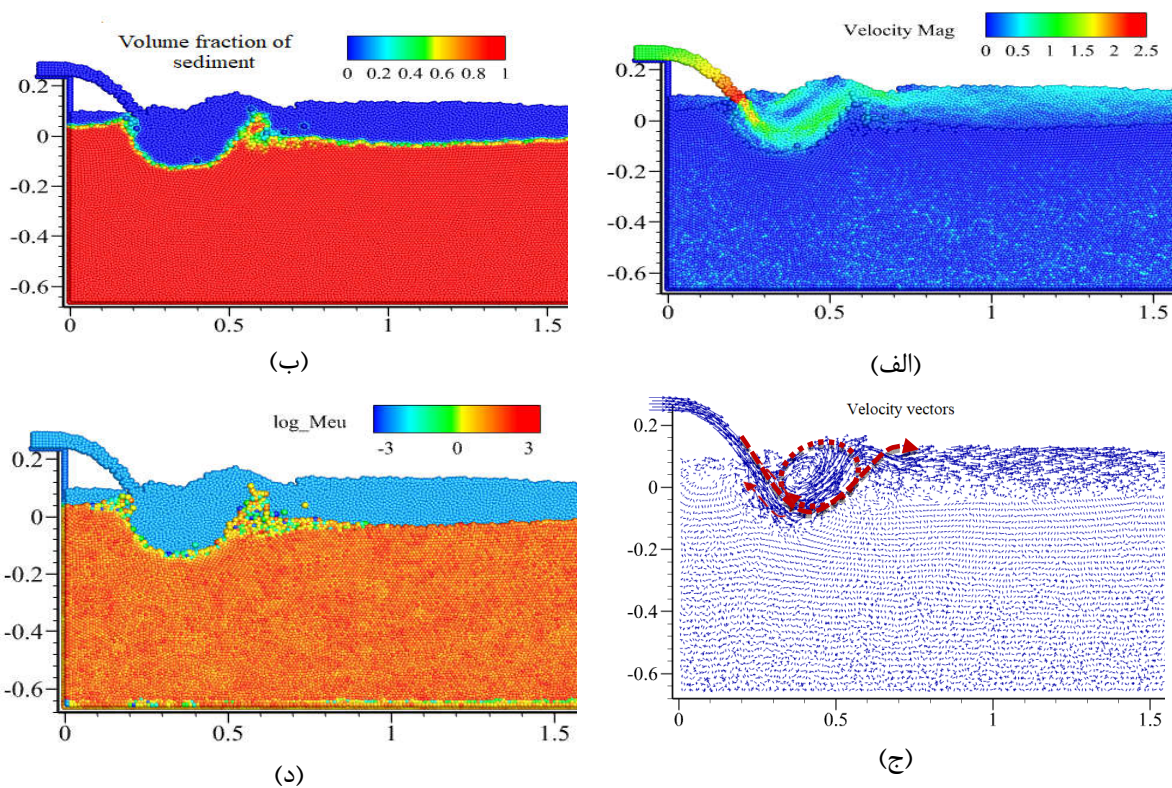
شماتیک مدل ساخته شده توسط ذرات که شامل یک مخزن مستطیل‌شکل با بستر افقی است، در شکل ۹ نشان داده شده است. در مدل حاضر با کاهش قطر ذرات، دقت مدل افزایش خواهد یافت؛ اما کاهش بیش از اندازه قطر ذرات باعث افزایش



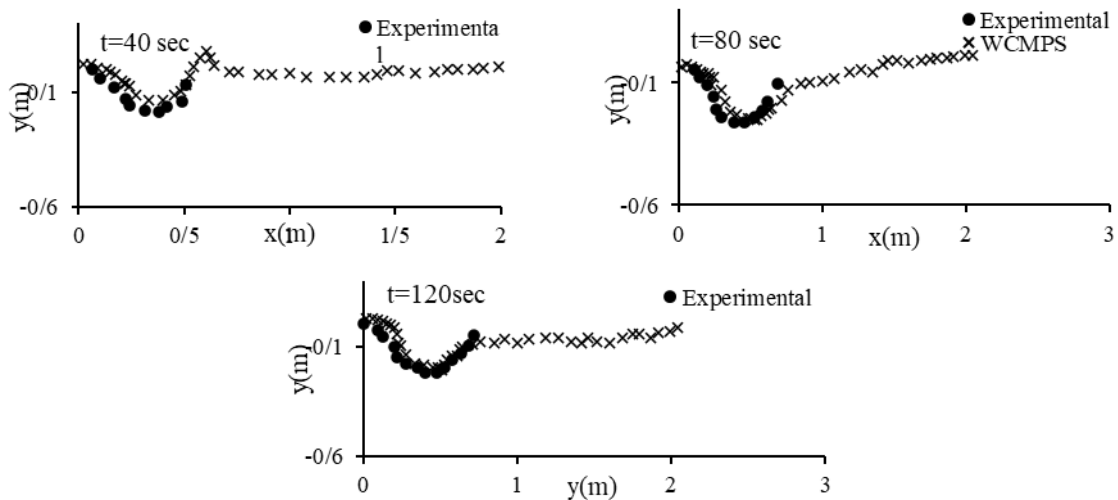
شکل ۸. شماتیک مدل آزمایشی که همه متغیرهای هندسی مرتبط و عمق آب‌شستگی را نشان می‌دهد (d)



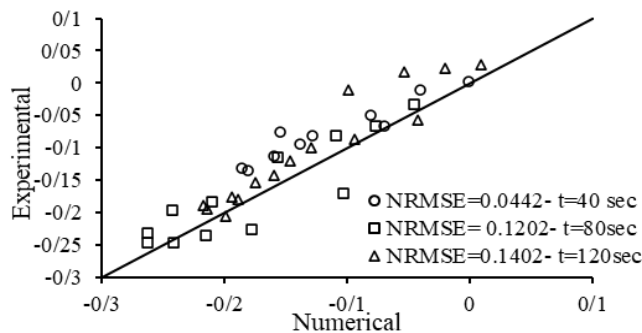
شکل ۹. موقعیت اولیه ذرات سیال، رسوب، دیواره و مجازی برای مدل ۳ با جزئیات دقیق



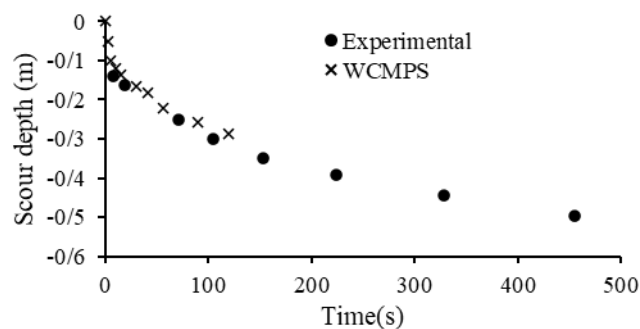
شکل ۱۰. شبیه‌سازی پروفیل سطح آزاد: الف) مقادیر سرعت، ب) کسر حجمی ج) بردارهای سرعت د) ویسکوزیته در زمان ۵ ثانیه



شکل ۱۱. مقایسه پروفیل‌های بستر تجربی و عددی در در زمان‌های ۴۰، ۸۰ و ۱۲۰ ثانیه برای مدل ۳



شکل ۱۲. نمودار پراکندگی گودال آب‌شستگی مدل عددی و آزمایشگاهی در زمان‌های ۴۰، ۸۰ و ۱۲۰ ثانیه



شکل ۱۳. مقایسه بیشترین عمق آب‌شستگی در زمان‌های متفاوت

است که این نشان‌دهنده کارایی و دقت مدل مد نظر در این مسئله است.

در شکل ۱۳ عمق آب‌شستگی در زمان‌های مختلف در مدل لاگرانژی با مدل آزمایشگاهی مقایسه شده است.

مقدار خطای پروفیل‌های گودال آب‌شستگی در زمان‌های ۴۰، ۸۰ و ۱۲۰ ثانیه محاسبه شده است و نمودار پراکندگی پروفیل سطح در شکل ۱۲ نشان داده شده است. خطای NRMSE برای سه زمان مد نظر به ترتیب ۴/۴، ۱۲ و ۱۴ درصد

یک مدل رئولوژیکی  $\mu(I)$  پیش‌بینی می‌شود. مدل عددی پیشنهادی توانسته است شکل و اندازه سوراخ آب‌شستگی را با موفقیت بازتولید کند. نتایج تجربی و عددی برای آب‌شستگی کاملاً سازگار هستند (به‌ویژه برای عمق سوراخ آب‌شستگی). نتایج نشان داد که چگونه جریان و گردش‌های بسیار فرسایشی می‌توانند ناحیه‌ای با ویسکوزیته کم در سطح زنجیره رسوب ایجاد کنند؛ جایی که تنش برشی می‌تواند از تنش تسلیم فراتر رود و رسوب می‌تواند برای تشکیل حفره آب‌شستگی فرسایش یابد. همچنین نتایج عمق آب‌شستگی با گذشت زمان با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شد و نتایج حاکی از دقت زیاد مدل در پیش‌بینی عمق آب‌شستگی دارد. به‌طورکلی نتایج این مطالعه توانایی روش WCMPS برای مدل‌سازی آب‌شستگی را به‌وضوح نشان می‌دهد.

بر اساس این شکل، با افزایش زمان عمق آب‌شستگی افزایش یافته است که این افزایش در زمان‌های ابتدایی روند سریع‌تری دارد و با افزایش زمان شدت فرسایش کاهش می‌یابد. مقایسه مدل عددی حاضر با مدل آزمایشگاهی نشان‌دهنده این است که مدل مد نظر به‌خوبی توانسته است عمق آب‌شستگی را شبیه‌سازی کند.

### نتیجه‌گیری

هدف از این مطالعه، توسعه و ارزیابی مدل لاگرانژی بدون شبکه و نیمه‌ضمنی ذرات متحرک با تراکم ضعیف با مدل با رئولوژی  $\mu(I)$  برای شبیه‌سازی آب‌شستگی پشت دیواره‌های ساحلی است. ماده رسوبی به‌عنوان یک سیال ویسکوپلاستیک غیر نیوتنی در نظر گرفته شده است که رفتار آن با استفاده از

### منابع مورد استفاده

1. Arikawa, T., T. Ikeda and K. Kubota. 2014. Experimental study on scour behind seawall due to tsunami overflow. *Journal of Japan Society of Civil Engineers* 70(2): I 926–I 930.
2. Briaud, J.-L., H.-C. Chen, A. Govindasamy and R. Storesund. 2008. Levee erosion by overtopping in New Orleans during the Katrina Hurricane. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 134(5): 618–632.
3. Chen, C. L. and C. H. Ling. 1996. Granular-flow rheology: role of shear-rate number in transition regime. *Journal of Engineering Mechanics* 122(5): 469–480.
4. Coleman, S.E. and B. W. Melville. 2001. Case study: New Zealand bridge scour experiences. *Journal of Hydraulic Engineering* 127 (7): 535–546.
5. Courant, R., K. Friedrichs and H. Lewy. 1967. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development* 11(2): 215–234.
6. Forterre, Y. and O. Pouliquen. 2008. Flows of dense granular media. *Annu Rev Fluid Mech* 40(1): 1–24.
7. Fraccarollo, L. and H. Capart. 2008. Riemann wave description of erosional dam-break flows. *Journal of Fluid Mechanics* 461: 183–228.
8. Galano, N., P. A. Moreno-Casas and J. A. Abell. 2021. Extending the Particle Finite Element Method for sediment transport simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 380: 113772.
9. Gingold, RA and JJ. Monaghan. 1977. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 181(3): 375–89.
10. Hashemi, L., S.M. Kashefipour, M. Ghomeshi and M. Bahrami Yarahmadi. 2024. Experimental Investigation of the Effect of the Pier Group Skew Angle on Local Scour Around the Piers under Steady Flow. *Journal of Water and Soil Science* 28(2): 1–16
11. Jafari Nodoushan, E. 2023. Modeling of Granular Flow in a Silo Using the Moving Particle Semi-implicit Method (MPS) with the Exponential Herschel-Balky Rheological Model. *Modares Civil Engineering journal* 23(3): 173–187.
12. Jafari Nodoushan, E., A. Shakibaeinia and K. Hosseini. 2018. A multiphase meshfree particle method for continuum-based modeling of dry and submerged granular flows. *Powder Technology* 335: 258–274.
13. Jafari Nodoushan, E., M. Tajnesaie and A. Shakibaeinia. 2024. Two- and three-dimensional multiphase mesh-free particle modeling of transitional landslide with  $\mu(I)$  rheology. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 96(5): 823–850. doi: 10.1002/flid.5274
14. Jafari Nodoushan, E. and A. Shakibaeinia. 2018. Multiphase mesh-free particle modeling of local sediment scouring with  $\mu(I)$  rheology. *Journal of Hydroinformatics* 21(2): 279–294. doi:10.2166/hydro.2018.068
15. Jafari Nodoushan, E. Kh. Hosseini, A. Shakibaeinia and S.F. Mousavi. 2015. Meshless particle modelling of free

- surface flow over spillways. *Journal of Hydroinformatics* 18(2): 354-370. 10.2166/hydro.2015.096
16. Jop, P., Y. Forterre and O. Pouliquen. 2006. A constitutive law for dense granular flows. *Nature* 441(7094): 727-730.
  17. Koshizuka, S. and Y. Oka. 1996. Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. *Nuclear Science and Engineering* 123(3): 421-434.
  18. McTigue, D. F. 1981. Mixture theory for suspended sediment transport. *Journal of the Hydraulics Division* 107(6): 659-673.
  19. Meyer-Peter, E. and R. Müller. 1948. Formulas for bed-load transport. *International Association of Hydraulic Structures Research* 3719/7.44(6).
  20. Nakamura, T. and N. Mizutani. 2013. Sediment transport calculation considering laminar and turbulent resistance forces caused by infiltration/exfiltration and its application to tsunami-induced local scouring. In *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, American Society of Mechanical Engineers 136(1): 190-198.
  21. Noguchi, K., S. Sato and S. Tanaka. 1997. Large scale experiment on scour of overflow in front of seawall by tsunami climbing up. *Proceedings of Coastal Engineering* 44: 196-300.
  22. Papanastasiou, T.C. 1987. Flows of materials with yield. *Journal of Rheology* 31.5: 385-404.
  23. Shakibaeinia, A. and Y.C. Jin. 2010. A weakly compressible MPS method for simulation of open-boundary free-surface flow. *International Journal of Numerical Methods in Fluids* 63(10): 1208-1232.
  24. Shakibaeinia, A. and Y.C. Jin. 2012. MPS mesh-free particle method for multiphase flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 229-232: 13-26.
  25. Shibata, K. and S. Koshizuka. 2007. Numerical analysis of shipping water impact on a deck using a particle method. *Ocean Engineering* 34(3-4): 585-593.
  26. Sugano, T., A. Nozu, E. Kohama, K. Shimosako and Y. Kikuchi. 2014. Damage to coastal structures. *Soils and Foundations* 54(4): 883-901.
  27. Tajnesaie, M., A. Shakibaeinia and K. Hosseini. 2018. Meshfree particle numerical modelling of sub-aerial and submerged landslides. *Computers and Fluids* 172: 109-121.
  28. Takahashi, H., S. Sassa, Y. Morikawa, D. Takano and K. Maruyama. 2014. Stability of caisson-type breakwater foundation under tsunami-induced seepage. *Soils and Foundations* 54(4): 789-805.
  29. Wang, D., S. Li, T. Arikawa. and H. Gen. 2016. ISPH Simulation of Scour behind Seawall Due to Continuous Tsunami Overflow. *Coastal Engineering Journal* 58(3): 1-23. doi:10.1142/S0578563416500145.
  30. Yeo, C. G., S. Lee, S. E. Yoon and J. W. Song. 2011. Temporal variation of local scour depth in the downstream of weir with shapes. *KSCE Journal of Civil and Environmental Engineering Research* 31(4B): 353-360.

## Simulation of Scouring Behind Coastal Walls by Lagrangian Method Using the $\mu(I)$ Rheology Model

E. Jafari Nodoushan<sup>1</sup> and A. Shirzadi<sup>2\*</sup>

(Received: August 29-2024 ; Accepted: October 28-2024)

### Abstract

The rapid and complex movement of sediments in rivers and coastal areas with highly erosive and unsteady flows presents river engineers with numerous problems in the geomorphology of alluvial rivers. Accurately predicting these complex processes in the water-sediment system (a multiphase, dense, granular flow system) is still a major challenge for mesh-based models. Due to the ability of meshless Lagrangian methods to model large deformations and discontinuities, meshless Lagrangian methods can provide a unique way to deal with this complexity. In the current research, the capabilities of the weakly compressibility moving particle semi-implicit (WC-MPS) model in soil-fluid interaction modeling are developed to enable the modeling of sediment transport and erosion effects behind coastal walls. In this method, granular material is considered a non-Newtonian and viscoplastic fluid. The  $\mu(I)$  rheological model has been used to predict the non-Newtonian behavior of the granular phase. To verify the application of the present model in simulating the interaction of liquid and solid phases, first, the widely used problem of dam break on an erodible bed was modeled. The NRMSE model was calculated to be approximately 6%, which indicates the efficiency and accuracy of the target model in this problem. At the end, the scouring of coastal walls was simulated by the WC-MPS method using  $\mu(I)$  rheology model. Investigations show that the processes related to erosion and scouring can be well modeled using the current Lagrangian method. The numerical results show excellent agreement with the laboratory measurements. It should be noted that the mean error of the mentioned model is estimated to be 10%.

**Keywords:** Scour depth, Lagrangian method, Non-Newtonian multiphase flow, Sediment transport, River engineering

---

1. Department of Civil Engineering, Bijar Campus, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.

2- Department of Rangeland and Watershed Management, Faculty of Natural Resources, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.

\*: Corresponding author, Email: a.shirzadi@uok.ac.ir