

## مدل عددی نیمه‌ضمنی روندیابی هیدرولیکی سیلاب (مطالعه موردی: بازه ليقوان تا هروی ليقوان چای، تبریز)

رضا مهدوی<sup>۱\*</sup>، مهدی فولادی‌پناه<sup>۲</sup> و ناصر عبدی<sup>۲</sup>

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۶/۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۹/۱۹)

### چکیده

روندیابی جریان رودخانه به‌عنوان یکی از موضوعات مهم در مهندسی هیدرولیک مطرح بوده است. موضوع اصلی مقاله حاضر، حل کامل معادلات سنت‌ونانت با استفاده از الگوی عددی نیمه‌ضمنی اختلاف محدود همراه با برقراری اصل بقای انرژی در نقاط ناپیوسته میدان جریان است. در این مدل عددی با دقت مرتبه اول، از روش محدود کننده شار به‌منظور برقراری شرط TVD و همچنین از الگوی Upwind برای گسسته‌سازی عبارت جابه‌جایی در معادله مومنتوم استفاده شده است. به کمک سه تابع ارزیابی عملکرد ضریب همبستگی، مجموع مربعات خطا و ضریب ناش-ساتکلیف، نحوه کارکرد مدل عددی در روندیابی سیل در ليقوان چای، حد فاصل ایستگاه ليقوان تا ایستگاه هروی با بیست مقطع عرضی بررسی شد. ضریب زبری مانینگ به‌عنوان پارامتر انجام فرایند واسنجی و صحت‌سنجی این مدل برابر با ۰/۰۲۸ تعیین شد. در نهایت مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از مدل عددی نیمه‌ضمنی با مدل هیدرولوژیکی ماسکینگ‌هام غیر خطی در همین بازه رودخانه صورت پذیرفت. مقادیر توابع ارزیابی عملکرد مدل نیمه‌ضمنی بیشتر از مدل هیدرولوژیکی به‌دست آمدند. نتایج نشان داد این مدل، ضمن داشتن راندمان محاسباتی بالا و نیز رفع محدودیت گام زمانی محاسبات برای برقراری شرط پایداری حل، از دقت بسیار زیادی برای پیش‌بینی خصوصیات هیدرودینامیکی رودخانه برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: اختلاف محدود، الگوی عددی، شرط TVD، محدود کننده شار، معادلات سنت‌ونانت

۱. گروه ریاضی، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاد اسلامی، رامهرمز، ایران

۲. گروه عمران، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاد اسلامی، رامهرمز، ایران

\*: مسئول مکاتبات: پست الکترونیکی: r.mahdavi.2010@gmail.com

## مقدمه

حل عددی معادلات مشتقات جزئی هیپربولیک سنت‌ونانت در مدل‌سازی جریان‌های غیرماندگار در قالب مدل‌های عددی ضمنی و نیمه‌ضمنی در از جمله موضوعات مورد توجه محققان است. معادلات سنت‌ونانت که بر پایه فرضیات (الف) توزیع هیدرواستاتیکی فشار، (ب) یک بعدی جریان، (پ) استفاده از معادله مانینگ به‌عنوان معادله مقاومت جریان، (ت) همگن بودن جریان و (ث) غیر قابل تراکم بودن جریان استوار هستند به قرار زیر هستند:

$$A_t + Q_x = 0 \quad [1]$$

$$Q_t + (UQ)_x + gA\eta_x + \gamma U = 0 \quad [2]$$

که در این معادلات  $A(x, \eta(x, t))$  مساحت مقطع عرضی برحسب مکان و تراز سطح آب،  $Q$  دبی جریان،  $\gamma$  ضریب اصطکاک و  $g$  شتاب ثقل هستند (۱۱). هدف از حل معادلات سنت‌ونانت، تعیین سرعت و عمق جریان در صفحه مختصاتی زمان-مکان است. اگرچه روش‌های حل ضمنی بدون هیچ قید و شرطی پایدار هستند اما در نهایت منجر به معادلات غیر خطی خواهند شد که حل آنها از پیچیدگی‌های بسیار زیادی برخوردار است. روش‌های نیمه‌ضمنی علاوه بر دارا بودن شرط پایداری حل از راندمان محاسباتی بسیار مناسبی نیز برخوردار است. افزایش میزان گام زمانی برای تسریع در حل معادلات یکی دیگر از اهداف الگوهای نیمه‌ضمنی است که از دیدگاه عملی، این مزیت کاربرد زیادی ندارد. به همین دلیل روش‌های نیمه‌ضمنی به‌عنوان الگویی بینابینی، طیف وسیعی از نیازهای محاسباتی را پاسخگو هستند (۱۰). ارائه مدل‌ها سابقه بسیار طولانی دارد. گودونف تکنیک جدیدی بر مبنای حل سری مسائل ریمن بین هر دو سلول محاسباتی متصل به هم با الگوی زمانی صریح ارائه کرد. از جمله مزیت‌های این روش، رفع محدودیت‌های گام زمانی برای برقراری شرط پایداری حل است (۱۲). شورمان و همکاران بیان داشته‌اند استفاده از روش گودونف در مقاطع مستطیلی با ساده و شیب طولی نسبتاً افقی کارایی دارد. درحالتی که شیب طولی کانال متغیر باشد، باید شیب طولی

به‌عنوان عبارت منبع در ساختار معادلات لحاظ شود (۱۵). برای و همکاران آنالیز حساسیت خطای پارامترهای ورودی روی خروجی مدل موج دینامیکی پرداختند. نتایج تحقیقات آنها نشان داد که تأثیر خطاهای پارامترهای ورودی روی خروجی مدل در برخی شرایط خاص کارکرد بسیار زیادی پیدا می‌کند، به‌عنوان مثال اعمال مقدار ضریب زبری مانینگ کم و یا شیب بستر تندتر، باعث خطای قابل توجهی در هیدروگراف طراحی خواهد شد (۹). ونوتلی در تحقیق خود روی تحلیل دینامیکی روندیابی سیلاب در رودخانه‌ها، به بررسی تأثیر عدد فرود، عدد کوران و همچنین عامل اصطکاک روی موج‌های پیش‌رونده و پس‌رونده پرداخت. نتایج تحقیق وی نشان داد برای تعداد امواج کم و امواج با ارتفاع زیاد، به‌ترتیب استفاده از مدل‌های موج کینماتیک و موج ثقیل نتایج رضایت‌بخشی به‌دنبال دارد (۱۹). لیو و همکاران معادلات سنت‌ونانت را با استفاده از الگوی صریح با روش بولتزمن حل کردند. آنها مدل خود را روی رودخانه یانگ‌دینگ در چین ارزیابی کردند. نتایج تحقیق آنها نشان داد، مدل صریح آنها تطابق خوبی با مقادیر اندازه‌گیری شده دارد (۱۳). شولتس به روندیابی صریح دینامیکی سیل با استفاده از نرم‌افزار HEC-RAS در بازه‌هایی از مناطق شهری-روستایی واقع در کارولینای شمالی پرداخت و نتیجه گرفت که کاهش شیب و افزایش زبری دشت سیلابی و نهر، تأثیر بیشتری بر افت قدرت امواج سیل دارد (۱۶). کاظمی محسن‌آبادی مطالعه‌ای در خصوص روندیابی سیلاب با استفاده از مدل هیدرولوژیکی ماسکینگهام چندخطی با الگوی گسسته‌سازی صریح در مقاطع نعل اسبی انجام داد. نتایج تحقیق وی حاکی از انطباق قابل قبول بین هیدروگراف‌های روندیابی شده هیدرولوژیکی با اندازه‌گیری شده بود (۵). اکبری و همکاران بررسی شماهای مختلف روندیابی هیدرولوژیکی صریح را در رودخانه کارون ارزیابی و نتایج حاصل از آن را با روندیابی هیدرولیکی صریح مقایسه کردند. نتایج تحقیق آنها نشان داد الگوهای مختلف با اختلاف غیرمعنی‌دار، عموماً نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهند. همچنین

مشقات مکانی معادلات، الگوی پرایزمن چهار نقطه‌ای به قرار زیر است:

$$f = \frac{1}{\psi} \theta (f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1}) + \frac{1}{\psi} (1-\theta)(f_{i+1}^n + f_i^n) \quad [3]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\theta(f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1})}{\Delta x} + \frac{(1-\theta)(f_{i+1}^n - f_i^n)}{\Delta x} \quad [4]$$

که در این معادله  $\Delta x$  گام زمانی،  $\theta$  پارامتر وزنی،  $f$  پارامتر وابسته،  $n$  و  $i$  به ترتیب مشخص کننده موقعیت مکانی و زمانی پارامتر  $f$  در میدان جریان هستند (۱۷). به منظور حفظ شرایط پایداری حل، مقدار  $\theta$  در بازه  $[0, 0.5]$  در نظر گرفته می‌شود. بنابراین معادلات (۱) و (۲) در بازه  $[0, L]$  در شبکه جابه‌جا شده، گسسته خواهند شد که گره‌های آن با نمادهای  $x_i$  و  $x_{i+\frac{1}{\psi}}$  نمایش داده می‌شوند. در این حالت مقدار دبی یا سرعت در گره‌هایی با اندیس نیمه‌صحیح،  $Q_{i+\frac{1}{\psi}}$  و  $U_{i+\frac{1}{\psi}}$ ، تعریف خواهند شد، درحالی‌که مقدار عمق جریان،  $h_i$  یا تراز سطح آب،  $\eta_i$ ، که در بازه  $[x_{i-\frac{1}{\psi}}, x_{i+\frac{1}{\psi}}]$  ثابت فرض می‌شوند، دارای اندیس‌های صحیح خواهند بود. گام مکانی شبکه به صورت  $\Delta x_{i+\frac{1}{\psi}} = \frac{x_{i+1} + x_i}{\psi}$  و  $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{\psi}} - x_{i-\frac{1}{\psi}}$  تعریف می‌شوند.

### گسسته‌سازی معادله پیوستگی

با انتگرال‌گیری از معادله (۱) نسبت به  $x$  در بازه  $[x_{i-\frac{1}{\psi}}, x_{i+\frac{1}{\psi}}]$  می‌توان نوشت:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{\psi}}}^{i+\frac{1}{\psi}} (A_t + Q_x) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-\frac{1}{\psi}}}^{i+\frac{1}{\psi}} A dx + \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_{i-\frac{1}{\psi}}}^{i+\frac{1}{\psi}} Q dx = 0 \quad [5]$$

طبق معادله (۵) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} V_i(\eta_i) + [(Q(i+\frac{1}{\psi}) - Q(i-\frac{1}{\psi}))] = 0 \quad [6]$$

فرم نیمه‌ضمنی حجم آب در گره  $i$ ام در لحظه  $n+1$  به فرم زیر خواهد بود:

$$V_i(\eta_i^{n+1}) = V_i(\eta_i^n) - \Delta t [Q_{i+\frac{1}{\psi}}^{n+0} - Q_{i-\frac{1}{\psi}}^{n+0}] \quad [7]$$

تأثیر تغییرات گام زمانی روی خروجی الگوها، بیشتر از گام مکانی است (۱). ظهیری و همکاران در مطالعه‌ای به بهینه‌سازی روش روندیابی هیدرولوژیکی صریح ماسکینگهام با الگوریتم ژنتیک و مقایسه آن با نتایج مدل صریح HEC-RAS4 در رودخانه‌های سیلابی پرداختند. نتایج تحقیق آنها حاکی از افزایش دقت روندیابی هیدرولوژیکی با اعمال اصلاحات از طریق الگوریتم ژنتیک بود (۴). کریمیان و همکاران مقایسه‌ای را بین روش‌های روندیابی هیدرولیکی موج جنبشی، موج پخشیدگی و موج پویا در بازه رودخانه دوآب صمصامی انجام دادند و سپس نتایج خروجی این سه روش را با خروجی مدل HEC-RAS ارزیابی کردند. نتایج تحقیق آنها حاکی از قابل قبول بودن روش موج جنبشی برای رودخانه‌های با شیب تند بود (۶). ولی‌سامانی و همکاران با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک به اصلاح روش روندیابی صریح هیدرولوژیکی ماسکینگهام غیرخطی در رودخانه‌های شریانی اقدام کردند. نتایج حاصل از تحقیق آنها رضایت‌بخش بود (۷). حیدری و کوچک‌زاده اقدام به حل نیمه‌تحلیلی معادلات سنت‌ونانت در محدوده جریان یکنواخت با استفاده از بسط تیلور و تبدیلات لاپلاس کردند. نتایج تحقیقات آنها نشان داد می‌توان از این مدل نیمه‌تحلیلی در کانال‌های آبیاری و زهکشی استفاده کرد (۳). همان‌طور که مشاهده می‌شود مطالعات بسیاری زیادی در بخش توسعه و تکمیل و بهینه‌سازی مدل‌های روندیابی به‌ویژه حل‌گرهای صریح انجام شده است. با توجه به مزیت‌های ذکر شده در خصوص حل‌گرهای نیمه‌ضمنی (دقت، پایداری و سرعت حل)، در تحقیق حاضر به ارائه مدل عددی نیمه‌ضمنی برای روندیابی هیدرولیکی معادلات سنت‌ونانت از طریق موج دینامیکی پرداخته شده است.

### مواد و روش‌ها

در این مقاله، با استفاده از الگوی عددی نیمه‌ضمنی، حل کامل معادلات پیوستگی و مومنتوم (معادلات سنت‌ونانت) در جریان‌های غیر ماندگار بررسی شده است. مبنای گسسته‌سازی

$$\frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - Q_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{(UQ)_{i+1}^n - (UQ)_i^n}{\Delta x} + gA_{i+\frac{1}{2}}^n \frac{\eta_{i+1}^{n+\theta} - \eta_i^{n+\theta}}{\Delta x} + \frac{\gamma_{i+\frac{1}{2}}^n}{A_{i+\frac{1}{2}}^n} Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = 0 \quad (11)$$

با مرتب کردن معادله (۱۱) معادله زیر حاصل خواهد شد:

$$\left( 1 + \frac{\gamma_{i+\frac{1}{2}}^n}{A_{i+\frac{1}{2}}^n} \right) Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + gA_{i+\frac{1}{2}}^n \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1}^{n+\theta} - \eta_i^{n+\theta}) = F_{i+\frac{1}{2}}^n \quad (12)$$

که در این معادله می توان نوشت:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = Q_{i+\frac{1}{2}}^n - \Delta t \frac{(UQ)_{i+1}^n - (UQ)_i^n}{\Delta x} - gA_{i+\frac{1}{2}}^n \theta \Delta t \left( \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_i^n}{\Delta x} \right) \quad (13)$$

در این معادله، مقدار  $A_{i+\frac{1}{2}}^n$  از رابطه  $A_{i+\frac{1}{2}}^n = A(x_{i+\frac{1}{2}}, \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_i^n}{\Delta x})$

محاسبه می شود. نماد  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  عملگر اختلاف محدود بر حسب گسسته-

سازی با الگوی صریح عبارات جابه جایی و شیب سطح آب است. مقدار عبارت جابه جایی،  $UQ$ ، به کمک روش Upwind از معادله زیر تعیین خواهد شد:

$$(UQ)_i^n = \begin{cases} \frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^n + Q_{i-\frac{1}{2}}^n}{2} & \text{if } \frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^n + Q_{i-\frac{1}{2}}^n}{2} \geq 0 \\ U_{i-\frac{1}{2}}^n & \text{if } \frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^n + Q_{i-\frac{1}{2}}^n}{2} < 0 \end{cases} \quad (14)$$

### الگوریتم حل معادلات

در هر گام زمانی مجهولات  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  و  $\eta_i^{n+1}$  در معادلات (۷) و

که در این معادله  $V_i(\eta_i)$  تابعی غیرخطی از  $\eta$  است. همچنین طبق تعریف می توان نوشت:

$$Q^{n+\theta} = \theta Q^{n+1} + (1-\theta)Q^n \quad (8)$$

معادله (۷) توصیف کننده فرم گسسته شده اصل بقای حجم سیال است. چون مقادیر تراز سطح آب،  $\eta$ ، و تراز کف،  $-h$ ، در گره هایی با اندیس صحیح تعریف می شوند ولی مقدار دبی در گره نیمه صحیح باید تعریف شود، لازم است تراز سطح آب و تراز کف به صورت صریح در گره  $i+\frac{1}{2}$  محاسبه شوند.

بدین منظور الگوی Upwind زیر براساس علامت  $Q_{i+\frac{1}{2}}$  به

منظور تعریف  $\eta$  استفاده می شود:

$$\eta_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \eta_i & \text{if } Q_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \eta_{i+1} & \text{if } Q_{i+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases} \quad (9)$$

مقدار تراز کف نیز از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$-h_{i+\frac{1}{2}} = \min(-h_i - h_{i+1}) \quad (10)$$

گسسته سازی معادله (۲) باید به گونه ای انجام پذیرد که علاوه بر برقراری ضوابط و شرایط گسسته سازی عددی، مدل سازی میدان جریان نیز به نحو صحیحی صورت گیرد تا عبارت جابه جایی، که عبارت مشترک در اصل بقای مومنتوم و انرژی است برقرار باشد. تورو بیان می کند زمانی که گسستگی جریان نه به دلیل تشکیل شوک بلکه به دلیل هندسه مجرا ایجاد شود، برقراری اصل بقای مومنتوم تضمین کننده برقراری اصل بقای انرژی نیز خواهد بود (۱۸). در این نوع فرمول بندی، به دلیل اینکه معادله مومنتوم بر حسب دبی حل خواهد شد، راه حل دبی- مبنا نیز خوانده می شود. این نوع گسسته سازی معادله (۲) مبتنی بر کاربرد الگوی اختلاف محدود مرکزی برای انتگرال گیری مکانی تراز سطح آزاد آب و الگوی نیمه ضمنی برای گسسته سازی زمانی است. در نتیجه برای گسسته سازی گرادیان سطح آزاد آب از روش پرایزمن و برای عبارت جابه جایی از الگوی صریح استفاده خواهد شد. در نتیجه می توان نوشت:

سیستم معادلات (۱۴)، سیستم غیر خطی است. ماتریس ضرایب  $M$  متقارن و سه قطری است که تمام درایه‌های قطر اصلی آن مثبت و بقیه منفی هستند. بعد از اینکه مقدار  $\eta^{n+1}$  به دست آمد، مقدار عبارت  $Q^{n+1}$  به راحتی برحسب مقدار  $\eta^{n+1}$  با استفاده از معادله (۱۲) قابل محاسبه خواهد بود. به منظور بهبود دقت مدل عددی برای حل پایدار بدون بررسی شرط پایداری حل اما برقراری شرط TVD از روش محدود کننده شار استفاده شد. الگوی انتخابی در این مدل، دارای دقت مرتبه اول است. با استفاده از روش شار محدود کننده، الگوی عددی دارای دقت مرتبه اول به الگوی عددی دارای دقت مرتبه دوم ارتقا می‌یابد. به همین دلیل روش محدود کننده شار در تقریب‌سازی عبارت جابه‌جایی، معادله (۱۴)، به کار گرفته شد. بر مبنای معادله گسسته شده، روش محدود کننده شار به عبارت جابه‌جایی،  $UQ$ ، مقدار تصحیح‌کننده‌ای را با استفاده از تابع محدود کننده شار،  $\psi$ ، اضافه می‌کند که مقدار آن تابعی از نظم و ترتیب مقادیر عددی به دست آمده برای عبارت جابه‌جایی است. بنابراین، تقریب عبارت جابه‌جایی به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$(UQ)_x \approx \frac{[(UQ)_{i+1+\frac{1}{2}} \Psi(r_{i+\frac{1}{2}}) \Delta(UQ)_{i+\frac{1}{2}}]}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{[(UQ)_i + \frac{1}{2} \Psi(r_{i+\frac{1}{2}}) \Delta(UQ)_{i+\frac{1}{2}}]}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \quad [20]$$

که در این معادله  $(UQ)_i$  از معادله (۱۴) به دست می‌آید. عبارت جابه‌جایی  $\Delta(UQ)_{i+\frac{1}{2}}$  به قرار معادله زیر خواهد بود:

$$\Delta(UQ)_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (UQ)_{i+\frac{1}{2}} - (UQ)_{i-\frac{1}{2}} & \text{if } \frac{U_{i-\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2}}}{2} \geq 0 \\ (UQ)_{i+\frac{3}{2}} - (UQ)_{i+\frac{1}{2}} & \text{if } \frac{U_{i-\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2}}}{2} < 0 \end{cases} \quad [21]$$

همسازی داده‌ها در نقطه  $x_{i+\frac{1}{2}}$  به فرم زیر تعریف می‌شود:

(۱۲) مجموعه‌ای از معادلات غیر خطی را در شبکه محاسباتی تشکیل می‌دهند. به منظور تسهیل در حل و همچنین کاهش حجم محاسبات می‌توان با جاگذاری عبارت  $Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$  از معادله (۱۲) در معادله (۷) سیستم معادلات را به سیستم یک مجهولی برحسب تراز آب،  $\eta_i^{n+1}$ ، به فرم زیر بیان کرد:

$$V_i(\eta_i^{n+1}) + p_{i-\frac{1}{2}}^n(\eta_{i-1}^{n+1}) + d_i^n(\eta_i^{n+1}) + p_{i+\frac{1}{2}}^n(\eta_{i+1}^{n+1}) = f_i^n \quad [15]$$

که در این معادلات  $p_{i\pm\frac{1}{2}}^n$ ،  $d_i^n$  و  $f_i^n$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$p_{i\pm\frac{1}{2}}^n = -\frac{g(\theta\Delta t)^2 A_{i\pm\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_{i\pm\frac{1}{2}} \left(1 + \gamma_{i\pm\frac{1}{2}}^n \Delta t\right)} d_i^n = -p_{i+\frac{1}{2}}^n - p_{i-\frac{1}{2}}^n \quad [16]$$

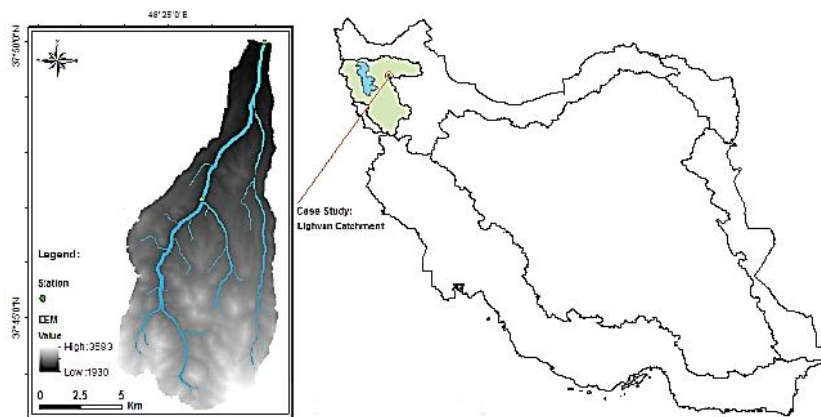
$$F_i^n = V_i(\eta_i^n) - (1-\theta)\Delta t \left[ \frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^n Q_{i+\frac{1}{2}}^n}{F_{i+\frac{1}{2}}^n} - \frac{Q_{i-\frac{1}{2}}^n Q_{i-\frac{1}{2}}^n}{F_{i-\frac{1}{2}}^n} \right] - \theta\Delta t \left[ \frac{F_{i+\frac{1}{2}}^n}{\left(1 + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta t\right)} - \frac{F_{i-\frac{1}{2}}^n}{\left(1 + \gamma_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta t\right)} \right] \quad [17]$$

سیستم معادلات ارائه شده در هر گام زمانی  $n$  در معادله (۱۵) را می‌توان در قالب ماتریسی زیر خلاصه‌نویسی کرد:

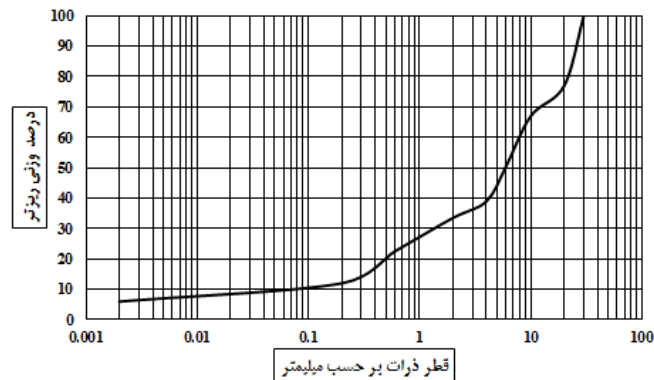
$$V(\eta) + M\eta = f \quad [18]$$

که در این معادله  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$  بردار مجهولات است. تعاریف عبارات معادله (۱۸) به قرار زیر است:

$$V(\eta) = \begin{bmatrix} V_1(\eta_1) \\ V_2(\eta_2) \\ \dots \\ V_N(\eta_N) \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} d_1 & p_{\frac{1}{2}} & \dots & 0 \\ p_{\frac{1}{2}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{N-\frac{1}{2}} \\ 0 & \dots & p_{N-\frac{1}{2}} & d_N \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad [19]$$



شکل ۱. موقعیت جغرافیایی پهنه مورد مطالعه



شکل ۱. منحنی دانه‌بندی ذرات مواد بستری

این رودخانه در حوضه آبریز دریاچه ارومیه، زیرحوضه تلخه- رود در جنوب شرقی تبریز در حدفاصل طول جغرافیایی ۲۰° ۴۶' تا ۳۵' ۴۶° شرقی و عرض جغرافیایی ۳۷° ۵۵' تا ۳۷° ۵۰' شمالی واقع شده است (شکل ۱). در حد فاصل بین دو ایستگاه، ۲۰ مقطع عرضی برداشت شده در سال ۱۳۹۱ مورد استفاده قرار گرفته است. رابطه دبی- اشل در ایستگاه ليقوان به‌عنوان شرط مرزی بالادست در مدل عددی مورد استفاده قرار گرفت. در شکل (۲)، منحنی متوسط دانه‌بندی مواد بستری و در جدول (۱) مشخصات مواد بستری رودخانه ارائه شده است.

از ضریب زبری مانینگ، برای واسنجی و صحت‌سنجی مدل استفاده شد. بدین منظور از دو هیدروگراف ثبت شده هم‌زمان در دو ایستگاه ليقوان و هروی برای واسنجی و از یک

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{U_{i-\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{3}{2}}}{U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}} & \text{if } \frac{U_{i-\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2}}}{2} \geq 0 \\ \frac{U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}}{U_{i+\frac{3}{2}} - U_{i+\frac{1}{2}}} & \text{if } \frac{U_{i-\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2}}}{2} < 0 \end{cases} \quad [22]$$

### شبیه‌سازی عددی

#### بازه مورد مطالعه

ارزیابی مدل ارائه شده در این مقاله به کمک شبیه‌سازی سیلاب در رودخانه ليقوان‌چای حد فاصل ایستگاه‌های هیدرومتری ليقوان (مرز بالادست) و هروی (مرز پایین‌دست) انجام گرفت.

جدول ۱. دانه‌بندی مواد بستری رودخانه ليقوان در محدوده مورد مطالعه

حدود دانه‌بندی بر حسب میلی‌متر	۰/۰۰۲-۰/۲	۰/۲-۰/۶	۰/۶-۲	۲-۴	۴-۶	۶-۱۰	۱۰-۲۰	۲۰-۳۰	۳۰-۶۴
درصد موجود	۶	۶	۱۰/۵	۱۱	۵/۵	۱۱/۵	۱۶/۵	۱۰	۲۳

جدول ۲. خلاصه نتایج محاسبات فرایند واسنجی و صحت‌سنجی مدل در ایستگاه هروی به‌منظور ارزیابی ضریب زبری مانینگ

تعداد داده	دوره واسنجی		دوره صحت‌سنجی		تعداد داده
	سیلاب یک	سیلاب دو	سیلاب سه	سیلاب سه	
	مشاهداتی	پیش‌بینی شده	مشاهداتی	پیش‌بینی شده	
	۲۵	۱۷	۲۵	۱۷	
متوسط	۳/۹۳۸	۲/۴۰۲	۲/۷۵۴	۲/۴۲۴	۲/۷۴۳
ماکزیمم	۴/۲۰	۳/۰۰	۳/۴۰۰	۳/۱۵	۳/۵۰۰
مینیمم	۳/۶۵	۲/۱۶	۲/۳۰۰	۲/۱۶	۲/۳۰۰
ضریب تغییرات	۰/۱۸۳۵۷	۰/۲۴۷۹۸	۰/۳۳۳۷۷	۰/۲۸۹۸۴۵	۰/۳۶۰۸
N.S	۰/۹۱	۰/۹۰۱۷	۰/۸۹۶۵	۰/۹۰۱۷	۰/۸۹۶۵
S.S.E	۰/۰۴۸۲	۰/۰۹۰۶۲۵	۰/۱۰۲۶۸	۰/۰۹۰۶۲۵	۰/۱۰۲۶۸
R <sup>۲</sup>	۰/۹۴۳۵	۰/۹۴۸۲	۰/۹۳۵۷	۰/۹۴۸۲	۰/۹۳۵۷

پیش‌بینی شده و مقدار N.S. برابر با صفر، نشان از انطباق مناسب مقادیر میانگین داده‌های اندازه‌گیری شده و شبیه‌سازی شده دارد، مقدار  $N.S. > 0.75$ ، حاکی از خوب بودن نتایج شبیه‌سازی، مقادیر N.S. بین  $0.36$  و  $0.75$ ، بیانگر رضایت‌بخش بودن شبیه‌سازی و مقدار منفی این ضریب حاکی از عدم کارایی مدل است (۱۴). ضریب همبستگی نیز در محدوده  $[0, 1]$ ، میزان انطباق داده‌های مشاهداتی و پیش‌بینی شده را نشان می‌دهد. هرچه مقدار این ضریب به یک نزدیک‌تر باشد، به انطباق کامل‌تر داده‌ها دلالت خواهد شد. مقدار S.S.E نزدیک به صفر نیز حاکی از انطباق بسیار مناسب داده‌های اندازه‌گیری شده و پیش‌بینی شده است (۸). خلاصه محاسبات فرایندهای واسنجی و صحت‌سنجی مدل در جدول (۲) ارائه شده است.

طبق نتایج ارائه شده در جدول (۲)، مقدار ضریب زبری مانینگ طی فرایندهای واسنجی و صحت‌سنجی مدل برابر با  $0.28$  تعیین شد. همانطور که در جدول (۲) مشاهده می‌شود تعداد زوج مرتب‌های (دبی، زمان) اندازه‌گیری شده برای

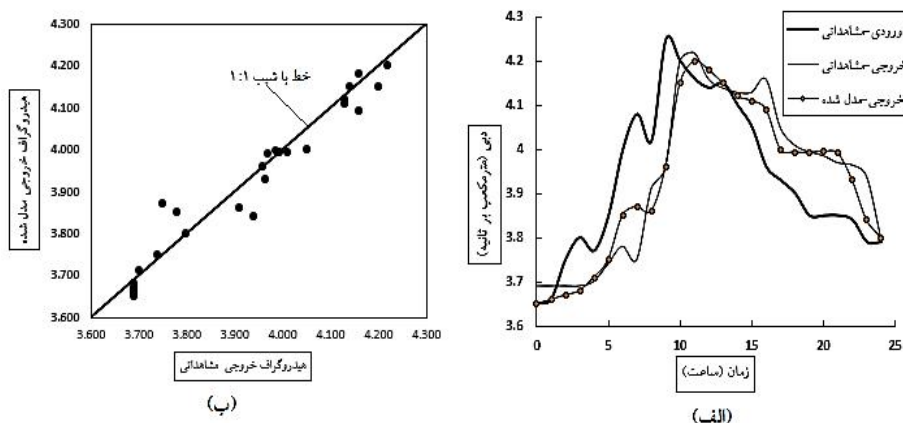
هیدروگراف دیگر برای صحت‌سنجی استفاده شد. عملکرد مدل در طی واسنجی و صحت‌سنجی با استفاده از سه شاخص ضریب ناش-ساتکلیف (N.S)، مجموع مربعات خطا (S.S.E) و ضریب همبستگی ( $R^2$ ) با فرمول‌های زیر مورد ارزیابی قرار گرفته است:

$$N.S. = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (X_{oi} - X_{ei})^2}{\sum_{i=1}^N (X_{oi} - \bar{X}_o)^2} \quad [29]$$

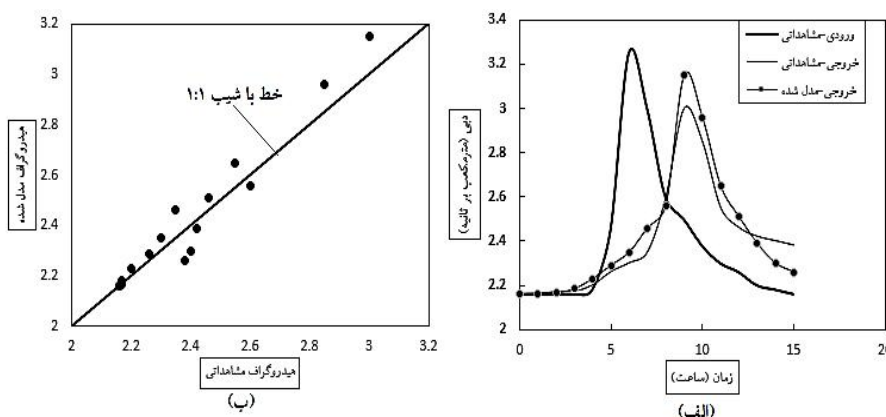
$$S.S.E = \sum_{i=1}^N (X_{oi} - X_{ei})^2 \quad [30]$$

$$R^2 = \frac{[\sum_{i=1}^N (X_{oi} - \bar{X}_o)(X_{ei} - \bar{X}_e)]^2}{\sum_{i=1}^N (X_{oi} - \bar{X}_o)^2 \sum_{i=1}^N (X_{ei} - \bar{X}_e)^2} \quad [31]$$

که در این معادلات  $X_o$  و  $X_e$  به ترتیب مقدار دبی مشاهداتی و پیش‌بینی شده،  $\bar{X}_o$  و  $\bar{X}_e$  به ترتیب مقدار متوسط دبی مشاهداتی و پیش‌بینی شده هستند (۸ و ۱۴). مقدار N.S. برابر با یک، نشان‌دهنده تناسب کاملی بین داده‌های مشاهداتی و



شکل ۳. واسنجی مدل در سیلاب اول الف) هیدروگراف‌های ورودی و خروجی بازه و ب) پراکنش حول خط ۱:۱

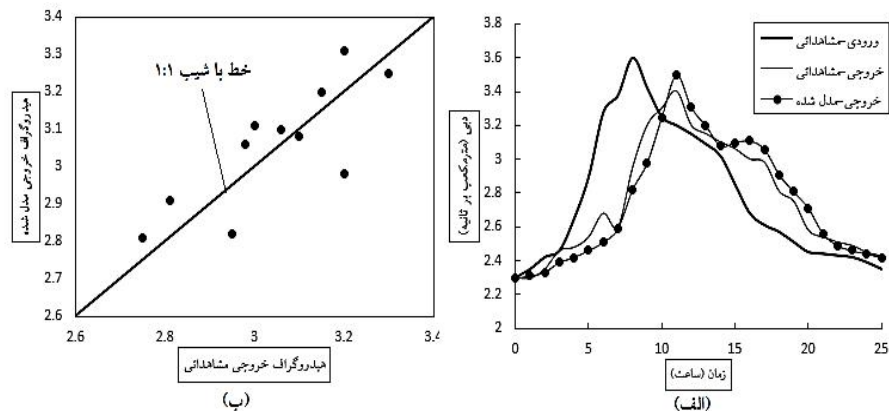


شکل ۴. واسنجی مدل در سیلاب دوم الف) هیدروگراف‌های ورودی و خروجی بازه و ب) پراکنش حول خط ۱:۱

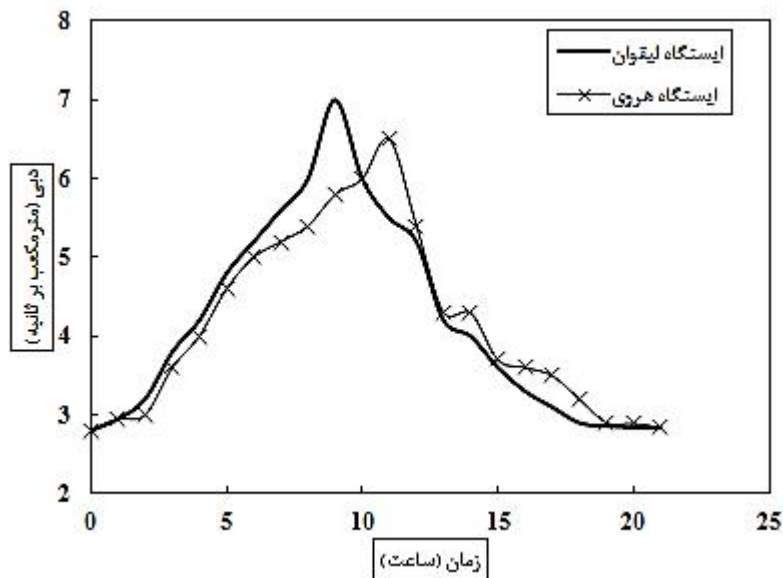
در قسمت (ب) شکل‌های (۳) تا (۵)، میزان انطباق داده‌های دبی محاسباتی و مشاهداتی از طریق پراکنش نقاط حول خط با شیب ۱:۱ نشان داده شده است. هرچه میزان ضریب N.S. بین دبی‌های محاسباتی و مشاهداتی به عدد یک نزدیک‌تر باشد، میزان پراکنش نقاط حول خط با شیب ۱:۱ کمتر خواهد بود (۱۴). طبق نمودارهای قسمت (الف) شکل‌های (۳) تا (۵)، شبیه‌سازی جریان در بازوی بالارونده هیدروگراف در دوره‌های واسنجی و صحت‌سنجی از انطباق بسیار مناسبی برخوردار هستند ولی در بازوی پایین‌رونده اختلاف نسبی مشاهده می‌شود که دلیل این امر تغذیه یا نفوذ جریان‌های آب‌های زیرزمینی و همچنین وجود مسیل‌هایی است که در هنگام بارش در آنها آب جاری می‌شود. طبق نمودارهای قسمت (ب) شکل‌های (۳) تا (۵)، می‌توان انطباق قابل قبول بین دبی‌های شبیه‌سازی شده و

هیدروگراف‌های اول و دوم در دوره واسنجی به ترتیب ۲۵ و ۱۷ و در دوره صحت‌سنجی ۲۵ است. نتایج نشان می‌دهد بر مبنای مقادیر سه تابع ارزیابی عملکرد N.S.، S.S.E و  $R^2$  که برای دو هیدروگراف جریان در دوره واسنجی به ترتیب (۰/۰۴۸۲، ۰/۹۱)، (۰/۹۴۳۵) و (۰/۹۰۱۷)، (۰/۰۹۶۲۵، ۰/۹۴۸۲) به دست آمدند، حاکی از روندیابی با دقت بسیار مناسب مدل عددی به‌ازای ضریب زبری ۰/۰۲۸ دارد. مقدار سه تابع ارزیابی عملکرد مذکور در دوره صحت‌سنجی به ترتیب (۰/۱۰۲۶۸، ۰/۸۹۶۵)، (۰/۹۳۵۷) به دست آمدند که ضمن تأیید مقدار ضریب زبری مانینگ تعیین شده در مرحله واسنجی، دقت بسیار زیاد مدل عددی را نیز تأیید می‌کند. شکل‌های (۳) و (۴) نتایج گرافیکی فرایند واسنجی و شکل (۵) عملکرد مدل در دوره صحت‌سنجی را نشان می‌دهند.





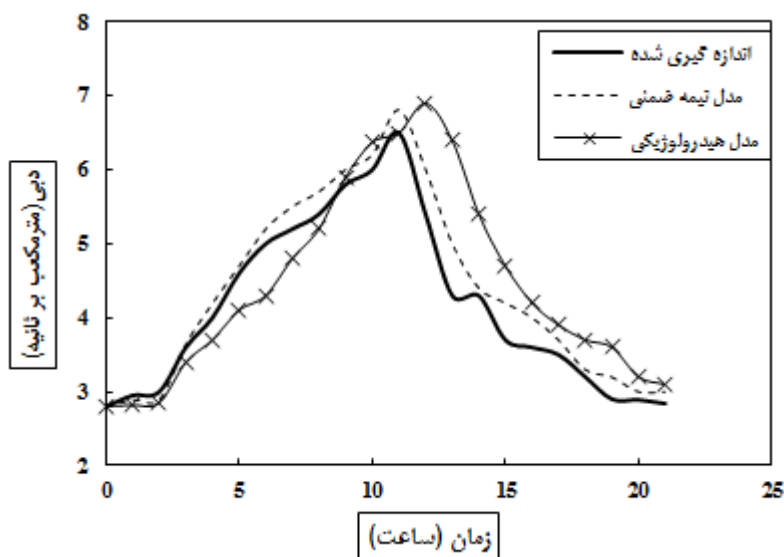
شکل ۵. صحت‌سنجی مدل الف) هیدروگراف‌های ورودی و خروجی بازه و ب) پراکنش حول خط ۱:۱



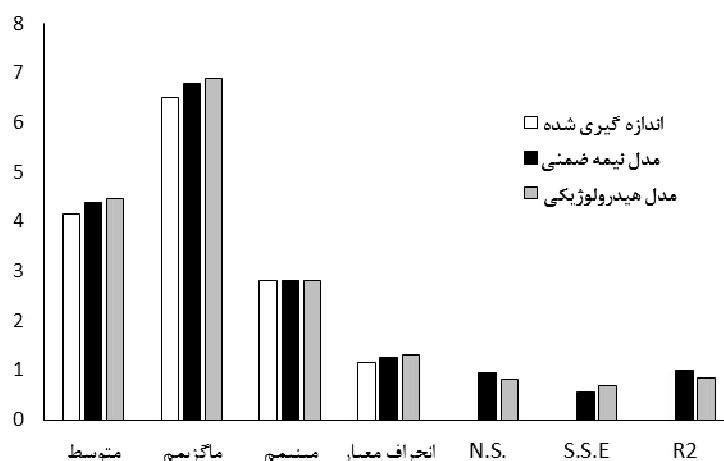
شکل ۶. هیدروگراف اندازه‌گیری شده جریان در دو ایستگاه هیدرومتری ليقوان و هروی

روش داس غیر خطی به ترتیب ۲/۲۹۳۲، ۰/۲۷۶۹ و ۰/۰۷۵۳ هستند. در شکل (۷)، مقایسه کیفی بین هیدروگراف اندازه‌گیری شده در ایستگاه هروی با هیدروگراف روندیابی شده توسط مدل نیمه‌ضمنی این تحقیق و مدل هیدرولوژیکی ارائه شده توسط اولادغفاری و همکاران، انجام شده است. همان‌طور که در شکل (۷) مشاهده می‌شود میزان انطباق هیدروگراف روندیابی شده با استفاده از مدل نیمه‌ضمنی تطابق بیشتری با هیدروگراف اندازه‌گیری شده دارد، اگرچه هر دو مدل در بازوی نزولی هیدروگراف خطای بیشتری نسبت به

اندازه‌گیری شده را مشاهده کرد. به‌منظور مقایسه مدل نیمه‌ضمنی با کارایی مدل‌های دیگر، از نتایج تحقیقات انجام شده توسط اولادغفاری و همکاران استفاده شده است (۲). آنها از مدل هیدرولوژیکی ماسکینگهام غیر خطی به‌منظور روندیابی سیلاب در ایستگاه هروی استفاده کردند. در شکل (۶) هیدروگراف اندازه‌گیری شده هم‌زمان در دو ایستگاه ليقوان و هروی ارائه شده است (۲). لازم به‌ذکر است، ضرایب روش ماسکینگهام شامل ضرایب  $X$  و  $K$  طبق نتایج به‌دست آمده توسط اولادغفاری و همکاران با استفاده از



شکل ۷. هیدروگراف اندازه‌گیری شده در ایستگاه هروی همراه با هیدروگراف‌های روندیابی شده در ایستگاه هروی



شکل ۸. مقایسه بین شاخص‌های آماری مدل‌های نیمه‌ضمنی و هیدرولوژیکی

مقدار S.S.E آن کمتر از مدل هیدرولوژیکی است. اختلاف بین ضرایب سه‌گانه مذکور در دو مدل، ضمن اینکه تأیید کننده عملکرد صحیح مدل نیمه‌ضمنی است، حاکی از برتری دقت روندیابی مدل نیمه‌ضمنی نیز است.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله معادلات سنت‌ونانت بدون نیاز به اعمال شرایط محدود کننده پایداری حل با استفاده از الگوی عددی

بازوی صعودی دارند. دلیل این اختلاف نیز وجود مسیل‌ها و نیز نفوذ آب‌های سطحی به جریانات آب‌های زیرزمینی است. جدول (۳) مقایسه کمی بین هیدروگراف اندازه‌گیری شده و هیدروگراف‌های روندیابی شده با دو مدل مختلف را با استفاده از توابع ارزیابی عملکرد ارائه می‌دهد. شکل (۸) نمودار کیفی از مقادیر توابع ارزیابی عملکرد است.

همان‌طور که در شکل (۸) مشاهده می‌شود، مقدار ضریب N.S. و  $R^2$  در مدل نیمه‌ضمنی بیشتر از مدل هیدرولوژیکی و

اگرچه مدل هیدرولوژیکی دارای ضرایب عملکردی بسیار مناسبی بود، اما مقدار ضرایب توابع عملکردی مدل نیمه‌ضمنی بیشتر از مدل هیدرولوژیکی به دست آمدند که این امر ضمن تأیید کارکرد صحیح مدل نیمه‌ضمنی، حاکی از دقت بیشتر آن است.

### سپاسگزاری

این مقاله از طرح پژوهشی داخلی با عنوان استفاده از روش عددی حل اختلاف محدود ضمنی در حل جریان ناپایدار استخراج شده است. نویسندگان مقاله از دانشگاه آزاد اسلامی واحد رامهرمز بابت تأمین مالی طرح تقدیر و تشکر به عمل می‌آورند.

نیمه‌ضمنی حل شدند. به منظور به حداقل رساندن خطای عددی میرایی و غیر واقعی از تابع محدود کننده شار برای عبارت جابه‌جایی استفاده شد. ارزیابی کارکرد مدل عددی نیمه‌ضمنی، از شبیه‌سازی جریان در رودخانه ليقوان‌چای در حد فاصل دو ایستگاه ليقوان و هروی با استفاده از سه تابع ارزیابی عملکرد ضریب ناش - ساتکلیف، مجموع مربعات خطا و ضریب همبستگی مورد سنجش قرار گرفت. فرایندهای واسنجی و صحت‌سنجی مدل نیمه‌ضمنی، با استفاده از ضریب زبری مانینگ انجام پذیرفت که مقدار این ضریب در بازه مورد مطالعه ۰/۰۲۸ تعیین شد. در نهایت به منظور ارزیابی میزان دقت مدل نیمه‌ضمنی، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از روندیابی مدل عددی حاضر و روندیابی هیدرولوژیکی انجام شده در بازه ليقوان - هروی با استفاده از روش ماکینگهام غیر خطی انجام گرفت.

### منابع مورد استفاده

۱. اکبری، غ. ح.، ر. براتی و ع. ر. حسین‌نژاد. ۱۳۹۰. بررسی شمای مختلف ماسکینگام کونژ در آبراهه‌های طبیعی. *مجله تحقیقات منابع آب ایران* ۷(۳): ۷۴-۶۲.
۲. اولادغفاری، ا.، ا. فاخری‌فرد، ا. ح. ناظمی و م. ع. قربانی. ۱۳۸۹. روندیابی هیدرولیکی سیلاب به روش موج دینامیک و مقایسه با روندیابی هیدرولوژیکی ماسکینگام خطی و غیرخطی (مطالعه موردی: ليقوان‌چای). *مجله دانش آب و خاک* ۱(۳): ۶۰-۴۷.
۳. حیدری، م. م. و ص. کوچک‌زاده. ۱۳۹۴. حل شبه‌تحلیلی معادله‌ی سنت‌ونانت در محدوده جریان یکنواخت. *نشریه آب و خاک (علوم و صنایع کشاورزی)* ۲۹(۶): ۱۴۳۷-۱۴۲۷.
۴. ظهیری، ع. ر.، ح. شریفان و س. تمدنی‌کناری. ۱۳۹۱. بهینه‌سازی روش ماسکینگام در روندیابی سیل در رودخانه‌های سیلابی. *مجله پژوهشنامه مدیریت حوضه آبخیز* ۳(۶): ۱۴-۱.
۵. کاظمی‌محسن‌آبادی، س. ۱۳۹۵. شبیه‌سازی عددی مدل ماسکینگام چندخطی در مقاطع نعل اسبی. *نشریه سد و نیروگاه برق آبی* ۳(۱۵): ۴۴-۳۵.
۶. کریمیان، ر. ا.، س. ج. ساداتی‌نژاد، ا. هنربخش، م. نجفی و خ. دودکانلوی میلان. ۱۳۹۲. مقایسه روش‌های هیدرولیکی روندیابی سیل در بازه‌ای از رودخانه دوآب صمصامی. *مجله مهندسی منابع آب* ۶: ۲۴-۱۶.
۷. ولی‌سامانی، ح. م.، ع. حقیقی و ش. فرهادی. ۱۳۹۳. روندیابی هیدرولوژیکی سیل به روش ماسکینگام خطی در سیستم رودخانه‌های چند شاخه‌ای با بهینه‌یابی توسط الگوریتم ژنتیک. *مجله هیدرولیک* ۱(۸): ۹۲-۸۳.
8. Alami M. T., M. A. Ghorbani and M. A. Malekani. 2013. Chaotic analysis and prediction of rivers. *Journal of Hydraulic Structures* 1(1): 54-64.
9. Barati, R., S. Rahimi and G. H. Akbari. 2012. Analysis of dynamic wave model for flood routing in natural rivers. *Journal of Natural Gas Science & Engineering* 5(3): 243-258.
10. Casulli, V. and P. Zanolli. 1998. A conservative semi-implicit scheme for open channel flows. *International Journal*

*of Applied Sciences* 5: 1–10.

11. Chanson, H. 2004. *The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, UK.
12. Godunov, S. K. 1959. A difference scheme for numerical computation of discontinuous solution of hydro dynamic equations. *Mathematics Journal* 47: 271-306.
13. Liu H., H. Wang, S. Liu, C. Hu, Y. Ding and J. Zhang. 2015. Lattice boltzmann method for the saint-venant equations. *Journal of Hydrology* 524: 411-416.
14. McCuen, R. H., Z. Knight and A. G. Cutter. 2006. Evaluation of the nash-sutcliffe efficiency index. *Journal of Hydrologic Engineering* 11(6): 597-602.
15. Schuurmans, J., O. H. Bosgra and R. Brouwer. 1995. Open channel flow model approximation for controller design. *Applied Mathematical Modelling* 19(9): 525-530.
16. Sholtes, J. 2009. Hydraulic analysis of stream restoration on flood wave propagation. MSc. Thesis, The Faculty of the University of North Carolina at Chapel Hill, USA.
17. Szymkiewicz, R. 2010. Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics. Springer, Gdańsk University of Technology, Poland
18. Toro, E. F. and P. G. Navarro. 2010. Godunov-type methods for free-surface shallow flows: A review. *Journal of Hydrology Research* 45(6): 736-751.
19. Venutelli, M. 2011. Analysis of dynamic wave model for unsteady flow in an open channel. *Journal of Hydrologic Engineering* 137(9): 1072-1087.

## Semi-Implicit Numerical Models of Flood Hydraulic Routing (A Case Study: Lighvan-Hervi Reach of Lighvan-Chai, Tabriz)

R. Mahdavi<sup>1\*</sup>, M. Fuladipanah<sup>2</sup> and N. Abdi<sup>2</sup>

(Received: August 30-2017 ; Accepted: December 10-2017)

### Abstract

River flow routing has been a significant issue in hydraulic engineering. The main goal of this research work was solving Saint-Venant equations by using the semi-implicit finite difference scheme and considering energy conservation principle at the discontinuous points of flow field. In this model, with the first order accuracy, the flux limiter scheme and Upwind for the scheme are used for the satisfaction of TVD condition and discretization of the advection phrase in the momentum equation, respectively. By using three assessment functions including Nash-Sutcliffe, sum square error and correlation coefficient, the performance of the model was evaluated for flood routing through Lighvan-Chai River between Lighvan and Hervi hydrometric stations with the application of twenty cross-sections. Manning roughness coefficient as a parameter for calibration and verification processes was determined to be 0.028. Finally, a comparison was made between nonlinear Muskingham hydrological method and the presented model through the same river reach. The amount of assessment functions for the semi-implicit model was calculated to be more than the hydrological one. The results showed that the presented model not only had high calculative efficiency and no limitation in time step calculation, but also displayed more accuracy for the hydrodynamic characteristics of flow.

**Keywords:** Finite Difference, Numerical Scheme, TVD condition, Flux Limiter, Saint-Venant Equations

---

1. Department of Mathematics, Ramhormoz Branch, Islamic Azad University, Ramhormoz, Iran.

2. Department of Civil Engineering, Ramhormoz Branch, Islamic Azad University, Ramhormoz, Iran.

\*: Corresponding Author, Email: r.mahdavi.2010@gmail.com