حل عددی معادله جریان یک بعدی آب در خاک با استفاده از روش عملگرهای مرجع

کورش محمدی[1]

چکیده

در این مقاله یک مدل عددی برای حل جریان یک بعدی آب در محیط غیراشباع معرفی گردیده است. جریان آب در لایه‌های غیراشباع خاک تابع یک معادله غیرخطی است، که حل تحلیلی آن بجز در موارد معدود و ساده شده امکان‌پذیر نیست. در این تحقیق معادلات دیفرانسیلی حرکت آب در خاک، با استفاده از یک روش تفاضل محدود جدید موسوم به روش عملگرهای مرجع حل گردید. روش عملگرهای مرجع برای جای‌گزین کردن معادلات دیفرانسیل جزئی با یک رشته معادلات تقریبی انتخاب گردیده که قابل حل کردن با روش‌های عددی هستند. بسیاری از روش‌های استاندارد تفاضل‌های محدود، حالت خاصی از این روش‌اند. ولی برخلاف آنها، با استفاده از این روش می‌توان محیط‌های با مرز نامنظم را هم مدل نمود. یک مدل یک بعدی برای پیش بینی مکش آب خاک (بار فشاری منفی) و مقدار رطوبت در خاک غیرهمگن، که دارای لایه‌بندی متفاوت است، با استفاده از روش عملگرهای مرجع ساخته شده، و با تعدادی حل تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردید. نتایج نشان‌دهنده دقت خوب و قابل قبول مدل در شبیه‌سازی حرکت آب در خاک می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: ***جریان در محیط غیراشباع، مدل‌سازی مکش آب خاک، روش عملگرهای مرجع***

مقدمه

مدل‌های حرکت آب در محیط غیراشباع از دیرباز مورد توجه دانشمندان علوم آب بوده است. باکینگهام (۲) جریان آب در محیط غیراشباع را به صورت تابعی از گرادیان مکش، که از فشار موبینگی ناشی می‌شد، بیان کرد. معادله دیفرانسیلی حرکت آب در خاک توسط ریچاردز (۷)، با استفاده از تشابه بین انتقال حرارت و جریان آب در محیط متخلخل حل گردید.

معادلات جریان آب در محیط غیراشباع، یک دسته معادلات دیفرانسیلی غیرخطی هستند که حل دقیق و تحلیلی آنها در بیشتر حالت‌ها امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل، روش‌های عددی به عنوان یک ابزار قدرتمند، در حل این گونه معادلات کاربرد وسیعی پیدا کرده است. طی یکی دو دهه اخیر، مدل‌های عددی زیادی ارائه شده است که هر کدام دارای ویژگی‌های مثبت و منفی می‌باشند. طی یک تحقیق، واندرهیج و همکاران (۱۳) نشان دادند که تا آن زمان تعداد ۳۹۹ مدل

۱. استادیار آبیاری و زه‌کشی دانشگاه تربیت مدرس

[Downloaded from jstnar.iut.ac.ir on 2026-10-12]

[DOR: 20.1001.1.24763594.1380.5.1.4.4]

عددی وجود داشته است. هدفی که بین همه تهیه کنندگان مدل‌ها مشترک بود، ارائه یک مدل با محدودیت‌های کمتر و عمومیت بیشتر بود، که در عین حال بتواند سادگی انجام محاسبات را حفظ کند.

استفاده از یک روش عددی عمومی که بتواند همه ویژگی‌های مهم یک مسئله فیزیکی، همچون پدیده حرکت آب در خاک را پوشش دهد، بسیار مشکل است، به ویژه هنگامی که شکل محیط و منطقه مورد مطالعه به صورت نامنظم بوده و شرایط مرزی پیچیده باشد. بنابراین، داشتن یک روش حل عددی، که بتواند در اکثر موارد قابل استفاده باشد، بسیار مهم است. از میان روش‌های عددی می‌توان روش تفاضل محدود، اجزای محدود و اجزای مرزی را نام برد. به طور کلی، روش‌های عددی دارای دو مرحله هستند: ابتدا معادلات دیفرانسیل با یک رشته معادلات تقریبی جای‌گزین می‌شوند، و سپس با استفاده از یک روش محاسباتی، دستگاه معادلات به دست آمده حل می‌گردد.

یکی از روش‌هایی که برای تخمین تقریبی و جای‌گزین کردن معادلات به کار رفته روش عملگرهای مرجع[1] است. بسیاری از روش‌های تفاضل‌های محدود استاندارد، و هم چنین روش حجم محدود[2] حالت‌های خاص این روش هستند (۱۲). برخلاف روش معمول تفاضل محدود، روش عملگرهای مرجع را می‌توان برای شبکه‌های نامنظم چهارضلعی نیز به کار برد. این روش توسط دانشمندان روسی، در طی چندین سال بسط داده شده است (۹و ۱۰). آنها این روش را برای حل معادلات بیضوی و انتقال حرارت به کار بردند (۳، ۴، ۱۰، ۱۱ و ۱۲)، و نشان دادند که یک روش پایدار و قابل اعتماد، به خصوص برای محیط‌های با مرز نامنظم است. گرچه روش عملگرهای مرجع دارای سابقه طولانی در ریاضیات است، ولی تاکنون از آن در علوم آب استفاده نگردیده است. این روش که مزیت اصلی آن نسبت به روش تفاضل محدود کلاسیک، استفاده آن از شبکه نامنظم است، می‌تواند در شبیه‌سازی مرزهای نامنظم، به ویژه در محیط دوبعدی بسیار مفید باشد.

مواد و روش‌ها

در این پژوهش از روش عملگرهای مرجع برای حل معادله یک بعدی حرکت آب در محیط غیراشباع و غیرهمگن استفاده شده، و مدل تهیه شده با حل تحلیلی و نتایج مشاهده‌ای حرکت آب در خاک مقایسه گردیده است.

معادلات حاکم بر جریان

با استفاده از معادله پیوستگی و قانون دارسی، معادله یک‌بعدی حرکت آب در محیط غیراشباع در جهت عمودی به صورت زیر است (۵):

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\theta)\left(\frac{\partial h}{\partial z}+1\right)\right]=C(h)\frac{\partial h}{\partial t}+q \qquad [1]$$

که در آن:

$K(\theta)$ = هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک و تابعی از مقدار رطوبت θ

h = مکش آب خاک (بار فشاری منفی[3])

z = مختصات مکان در جهت محور عمودی z

t = زمان

q = عامل تغذیه و یا تخلیه

$C(h)$ = ظرفیت ویژه آب خاک، که برابر است با $\phi\frac{\partial S_w}{\partial h}$

ϕ = تخلخل خاک

S_w = درجه اشباع خاک

روش‌های متعددی برای محاسبه رابطه بین درجه اشباع (S_w) و فشار مویینگی یا مکش آب خاک (h) ارائه شده است، که معروف‌ترین آنها روابط لورت (۶)، بروک و کری (۱) و وان گنوختن (۱۴) می‌باشد. در مدل حاضر از رابطه وان گنوختن به صورت زیر استفاده شده است:

$$S_e=\left[1+(\alpha h)^n\right]^{-m} \qquad [2]$$

1. Method of reference operators
2. Finite Volume
3. Soil-water suction (negative pressure head)

[Downloaded from jstnar.iut.ac.ir on 2026-10-12]

[DOR: 20.1001.1.24763594.1380.5.1.4.4]

که در آن α و n مقادیر ثابت تجربی هستند که بـه نـوع خـاک وابسته بوده، و $m=1-\frac{1}{n}$ می‌باشد. S_e درجه اشباع مؤثر است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود (۱۴):

$$S_e=\frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw}}=\frac{\theta_w - \theta_{rw}}{1 - \theta_{rw}} \qquad [۳]$$

S_{rw} و θ_{rw} به ترتیب درجه اشباع باقی مانده، و حداقل مـیزان رطوبتی است کـه در آن جـریان آب عـملاً در خـاک مـتوقف می‌شود.

در محیط غیراشباع، چون فقط قسـمتی از تـخلخل مـحیط متخلخل برای جریان آب در دسترس است، بـایستی خـاک را نسبت به حالت اشباع تصحیح کرد. برای این منظور از ضریبی به نام ضریب هدایت هیدرولیکی نسبی (K_{rw}) استفاده گردیده، و توسط رابطه زیر به هدایت هیدرولیکی اشباع ربط داده می‌شود (۶):

$$K_w = K_{rw} K_{sw} \qquad [۴]$$

که در این رابطه K_{sw} هدایت هیدرولیکی اشباع، و K_w هدایت هیدرولیکی غیراشباع است.

برای تـعیین ضـریب هـدایت هـیدرولیکی نسـبی، روابـط ریاضی متعددی ارائه شده است. روابط ریاضی ایـن مـزیت را دارند که استفاده از آنها در مدل‌های عددی ساده‌تر می‌باشد. در مدل حاضر برای تعیین ضریب هـدایت هـیدرولیکی نسـبی از رابطه‌ای که توسط وان گنوختن (۱۴) ارائه شده است، اسـتفاده گردید:

$$K_{rw}=S_e^{2}\left[1-\left(1-S_e^{\frac{1}{m}}\right)^{m}\right]^{2} \qquad [۵]$$

روش عملگرهای مرجع

مـزیت اصـلی روش عـملگرهای مـرجع، کـه عـموماً تـوسط دانشمندان روسی بسط داده شده (۹و۱۰)، در استفاده از شبکه نامنظم است، که امکان مدل کردن محیط‌های با مرز نامنظم را فراهم می‌سازد. شکل ۱ نمونه‌ای از این نوع شبکه است. گره‌ها از محل تلاقی خطوط به وجود آمده، و هر گره به وسیله دو اندیس i و k مشخص می‌گردد. در حالت یک بعدی، فـواصـل گـره‌ها ممکن است به صورت نامنظم تـغییر کـند، و هـر گـره بـا یک اندیس i مشخص مـی‌شود. در روش عـملگرهای مـرجع، بـا استفاده از فرمول گرین[1] برای مشتق مرتبه اول تابع u نسبت به x، رابطه زیر را می‌توان نوشت (۱۲):

$$\int_{\Omega}\vec{\nabla}.\vec{u}\,d\Omega=\oint_{s}\vec{u}.d\vec{S} \qquad [۶]$$

که در این رابطه S سطح بسته‌ای است که حـجم دلخـواه Ω را می‌پوشاند و u یک تابع پیوسته با مشتقات جزئی روی ناحیه Ω است.

با استفاده از تعریف انتگرال و متوسط‌گیری به عنوان تابعی از مقادیر آن روی مرزها، می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\Omega}=\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x}d\Omega=\frac{1}{\Omega}\oint_{S}u\vec{I}_x.d\vec{S} \qquad [۷]$$

که در آن I_x برداری است که در جهت محور x می‌باشد. در یک محیط یک‌بعدی، S بـرابـر طـول یک سـلول بـوده و مـی‌توان نوشت:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\Omega}=\frac{1}{\Omega}\int_{b}u\,dx=-\frac{1}{\Omega}\int_{b}x\,du \qquad [۸]$$

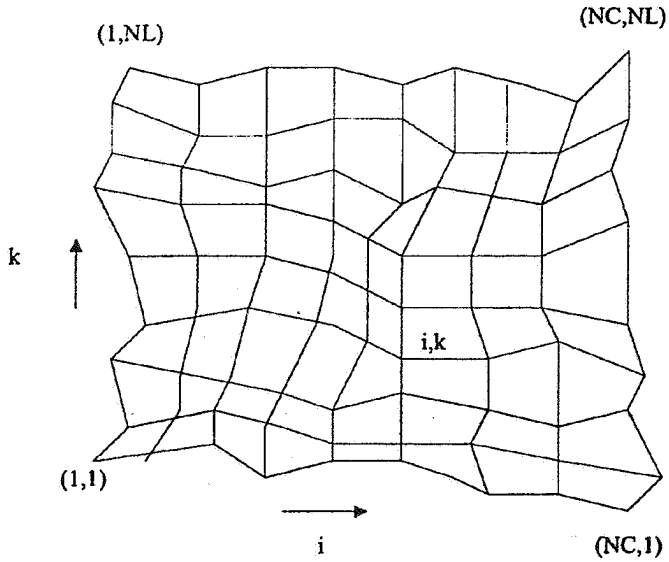
برای تعیین تقریبی انـتگرال در سـمت راست مـعادله ۸، از روش ذوزنقه استفاده می‌شود، و با توجه به این که جهت حرکت آب در خاک در راستای قائم در نظر گرفته شده است، از این به بعد از متغیر z به عنوان متغیر طول، با جهت مثبت از بالا بـه پایین استفاده می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{VN_i}\left(u_i - u_{i-1}\right) \qquad [۹]$$

1. Green's Formula

[Downloaded from jstnar.iut.ac.ir on 2026-10-12]

[DOR: 20.1001.1.24763594.1380.5.1.4.4]



شکل ۱. شبکه نامنظم مورد استفاده در روش عملگرهای مرجع

که مقدار VN_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$VN_i=\begin{cases}\frac{z_2-z_1}{2} & \text{اگر} \quad i=1\\ \frac{z_{i+1}-z_{i-1}}{2} & \text{اگر} \quad i=2,...,M-1\\ \frac{z_M-z_{M-1}}{2} & \text{اگر} \quad i=M\end{cases} \qquad [10]$$

برای مشتق مرتبه دوم، با استفاده از روابط به دست آمده، و با کمک گرفتن از بسط سری تیلور می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial W}{\partial z}=W\left(\frac{z_{i+1}+z_i}{2}\right) \qquad [11]$$

$$\left.\frac{dW}{dz}\right|_{z_i}=\frac{1}{VN_i}\left(W_i-W_{i-1}\right)+O(h) \qquad [12]$$

که در آن $O(h)$ خطای مرتبه اول قطع کردن در سری تیلور می‌باشد، و W یک تابع مشتق مرتبه اول است. بنابراین، برای جمله $\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ در معادله انتقال حرارت می‌توان نوشت:

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{zi}=\frac{1}{VN_i}\left[K_i\left(\frac{u(z_{i+1})-u(z_i)}{z_{i+1}-z_i}\right)-K_{i-1}\left(\frac{u(z_i)-u(z_{i-1})}{z_i-z_{i-1}}\right)\right] \qquad [13]$$

با استفاده از روابط به دست آمده فوق و جای‌گزین کردن آنها در معادله ۱ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{VN_i}\left[K_i\left(\frac{h_{i+1}^{n+1}-h_i^{n+1}}{z_{i+1}-z_i}\right)-K_{i-1}\left(\frac{h_i^{n+1}-h_{i-1}^{n+1}}{z_i-z_{i-1}}\right)\right]+\frac{1}{VN_i}\left(K_i-K_{i-1}\right)=C(h)\frac{h_i^{n+1}-h_i^n}{\Delta t}+q_i \qquad [14]$$

که در آن Δt گام زمانی بوده، و n اندیس مربوط به زمان می‌باشد.

نتایج و بحث

به طور کلی مدل باید قبل از استفاده ارزیابی شده و نه تنها قابلیت‌های آن مشخص شود، بلکه محدودیت‌های آن نیز تعیین

[Downloaded from jstnar.iut.ac.ir on 2026-10-12]

[DOR: 20.1001.1.24763594.1380.5.1.4.4]

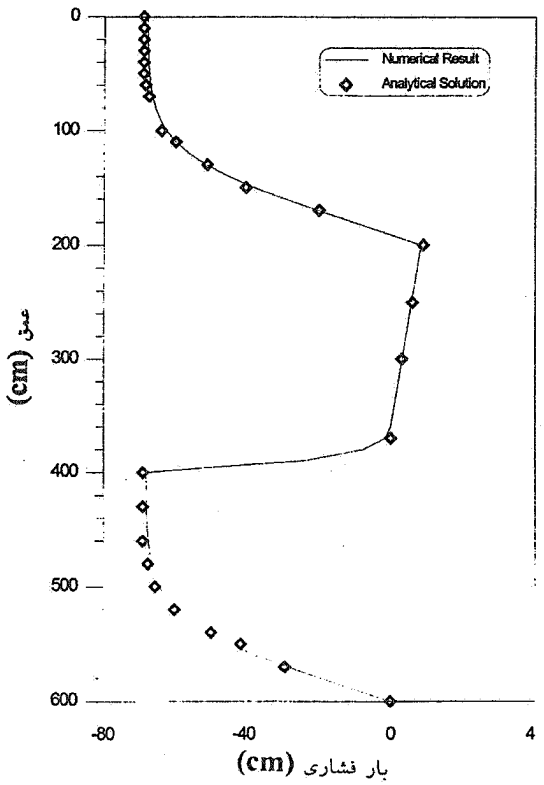
جدول ۱. ویژگی‌های فیزیکی خاک‌ها در مثال ۱ و ۲

نوع خاک	K (cm/s)	α cm^{-1}	n	θ_s	θ_r
لومی شنی ریز	$۶/۲۶\times۱۰^{-۳}$	۰/۰۲۰۸	۲/۲۳۹۰	۰/۳۶۵۸	۰/۰۲۸۶
لوم رسی سیلتی	$۱/۵۲\times۱۰^{-۴}$	۰/۰۱۰۴	۱/۳۹۵۴	۰/۴۶۸۶	۰/۱۰۶۰

گردد. برای اثبات این که مدل حاضر می‌تواند جواب‌های صحیح ارائه دهد، لازم است با حل تحلیلی مقایسه شود. در این مقاله، راه حل مدل با یک حل تحلیلی، و با نتایج یک آزمایش فیزیکی مقایسه می‌گردد.

مورد اول جریان ماندگار آب در حالت یک بعدی عمودی و در راستای قائم بوده، و شامل یک ستون خاک به ارتفاع شش متر است، که از سه لایه تشکیل شده و ضخامت هر لایه دو متر می‌باشد. جدول ۱ ویژگی‌های فیزیکی خاک‌های مورد استفاده را نشان می‌دهد (۸). لایه لوم رسی سیلتی[1] در وسط دو لایه لومی شنی ریز[2] واقع گردیده است. مرز بالا را یک جریان ورودی ثابت آب با شدتی برابر $۱/۶\times۱۰^{-۴}$ سانتی‌متر در ثانیه، و مرز پایین را بار فشاری صفر تشکیل می‌دهد. حل تحلیلی این مثال فرضی توسط راک‌هولد و همکاران (۸) ارائه شده است. در حل عددی بر اساس معادله ۱۴، ستون خاک به ۶۰ سلول ۱۰ سانتی‌متری تقسیم گردید. شکل ۲ توزیع بار فشاری و مقایسه آن با نتایج حل تحلیلی را نشان می‌دهد، که بیانگر هم‌خوانی خوب بین این دو نتیجه می‌باشد.

مورد دوم مربوط به مقایسه بین مدل و یک آزمایش فیزیکی است، که توسط ویرنگا و همکاران (۱۵) در آزمایشگاه جورنادا[3] در نیومکزیکو انجام یافته، و نیز مقایسه با حل تحلیلی معادلات مربوط به آزمایش می‌باشد. یک لیسیمتر به عمق ۵/۸۵ متر، که توسط لایه‌هایی به ضخامت ۲۰ سانتی‌متر به طور یک در میان از دو نوع خاک پر شده بود، با سرعت $۲/۳۸\times۱۰^{-۵}$ سانتی‌متر در ثانیه آبیاری گردید. مقدار رطوبت خاک و بار فشاری آب در داخل لیسیمتر، به طور مرتب توسط یک رطوبت‌سنج نوترونی و تانسیومتر اندازه‌گیری شد. مقایسه



شکل ۲. مقایسه حل تحلیلی با نتایج مدل در مثال ۱

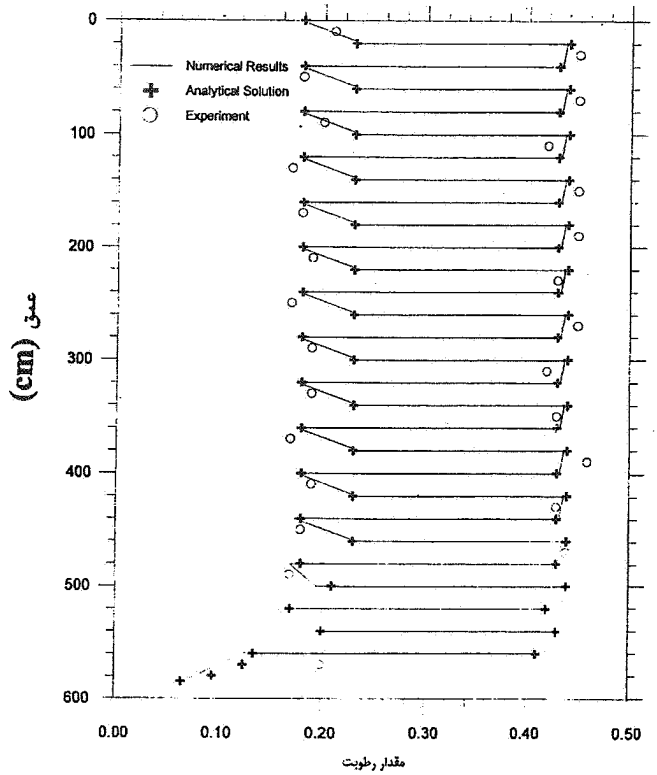
اندازه‌گیری‌ها با حل تحلیلی و نتایج مدل عددی در شکل‌های ۳ و ۴ نمایش داده شده است. مشخصات دو نوع خاک همانند مثال اول بوده، و تنها ضریب α برای خاک لومی شنی ریز برابر ۰/۰۲۸ می‌باشد.

با در نظر گرفتن خطاهایی که معمولاً در هنگام اندازه‌گیری رطوبت وجود دارد، و همین طور عدم اطمینان به تطابق پارامترهای انتخاب شده در مدل با واقعیت، می‌توان گفت که مقادیر اندازه‌گیری شده و مدل، نتایج نسبتاً نزدیکی را نشان می‌دهند، و نتایج مدل به حل تحلیلی بسیار شبیه است.

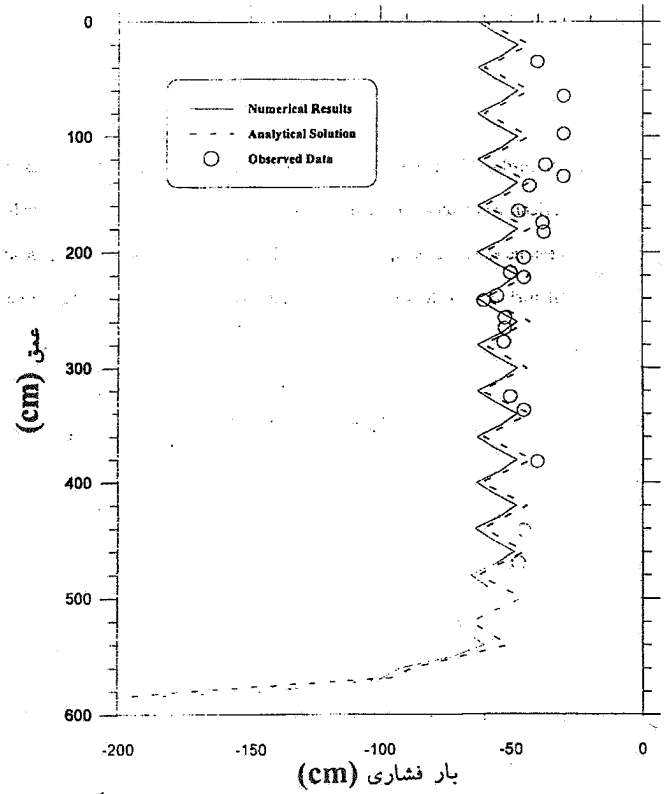
1. Silty Clay Loam 2. Loamy Fine Sand 3. Jornada Test Facility

[Downloaded from jstnar.iut.ac.ir on 2026-10-12]

[DOR: 20.1001.1.24763594.1380.5.1.4.4]



شکل ۳. مقایسه مقدار رطوبت بین نتایج مدل، حل تحلیلی و آزمایش



شکل ۴. مقایسه بار فشاری بین نتایج مدل، حل تحلیلی و آزمایش

[Downloaded from jstnar.iut.ac.ir on 2026-10-12]

[DOR: 20.1001.1.24763594.1380.5.1.4.4]

نتیجه‌گیری

روش عملگرهای مرجع، که یک روش تفاضل محدود ولی با عمومیت بیشتر می‌باشد، در این مقاله معرفی گردید. این روش که توسط دانشمندان روسی بسط یافته است، فقط در حیطه ریاضیات باقی مانده بود؛ مدل تهیه شده یکی از اولین کاربردهای عملی این روش در شاخه مهندسی آب می‌باشد. قابلیت استفاده از روش تفاضل محدود در روی یک محیط با مرزهای نامنظم، و استفاده از شبکه چهارضلعی‌های غیرمربع یا مستطیل دوبعدی، از مزایای اصلی این روش است. مدل ارائه شده توانست با موفقیت حرکت یک‌بعدی آب در محیط غیراشباع را شبیه سازی کند. این مدل را می‌توان برای حالت دوبعدی نیز تعمیم داد.

منابع مورد استفاده

1. Brooks, R. J. and A. T. Corey. 1964. Hydraulic properties of porous media. Hydro. Paper 3, Colorado State University, Fort Collins.
2. Buckingham, E. 1970. Studies on the movement of soil moisture. USDA Bur. Soils Bull. 38.
3. Denisov, A. A., A. V. Koldoba and Y. A. Poveshchenkov. 1989. The convergence to generalized solutions of difference schemes of the reference-operator method for Poisson's equation. USSR Comput. Math. and Math. Phys. 29(2): 32-38.
4. Favorskii, A. P., V. F. Tishkin and M. Shashkov. 1979. Variational difference schemes for the heat conduction equation on non-regular grids. Sov. Phys. Dokl. 24(6): 446. American Institute of Physics.
5. Feddes, R. A., P. Kabat, P. J. T. Van Bakel, J. J. B. Bronswijk and J. Halbertsma. 1988. Modelling soil water dynamics in the unsaturated zone-state of the art. J. Hydr. 69: 100-111.
6. Leverett, M. C. 1941. Capillary behavior in porous solids. Trans. AIME 142: 152-169.
7. Richards, L. A. 1931. Capillary condition of liquids through porous mediums. Physics 1: 318-333.
8. Rockhold, M. L., C. S. Simmons and M. J. Fayer. 1997. An analytical solution technique for one-dimensional, steady vertical flow in layered soils. Water Rosour. Res. 33(4): 897-902.
9. Samarskii, A. A., V. F. Tishkin, A. P. Favorskii and M. Shashkov. 1981. Operational finite difference schemes. Diff. Eqns. 17(7): 854-862.
10. Samarskii, A. A., V. F. Tishkin, A. P. Favorskii and M. Shashkov. 1982. Employment of the reference-operator method in the construction of finite difference analogs of tensor operations. Diff. Eqns. 18(7): 881-885.
11. Shashkov, M. and S. Steinberg. 1995. Support-operator finite difference algorithms for general elliptic problems. J. Comput. Physics 118: 131-151.
12. Shashkov, M. 1996. Conservative Finite Difference Methods on General Grids. CRC Press, New York.
13. Van der Heijde, P. K. M., P. S. Huyakorn and J. W. Mercer. 1984. Testing and validation of groundwater models. Proc. Practical Applications of Groundwater Modeling, NWWA/IGWMC Conference, Columbus, OH, USA.
14. Van Genuchten, M. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil. Soc. Am. J. 44: 892-899.
15. Wierenga, P. J., D. Bachelet, J. R. Bilsjie, D. B. Elabd, D. B. Hudson, M. Nash, I. Porro, W. R. Strong, A. Toorman and J. Vinson. 1988. Validation of stochastic flow and transport models for unsaturated soils. Res. Rep. 88-SS-03, New Mexico St. Univ., Las Cruces, USA.

[Downloaded from jstnar.iut.ac.ir on 2026-10-12]

[DOR: 20.1001.1.24763594.1380.5.1.4.4]